Mathematische Logik & Mengenlehre
Sechzehnte Vorlesung
Dr. Yurii Khomskii, 6. Juni 2018

<u>Ordinalzahlen</u>

<u>Letztes Mal</u>: $(W,<)$ Wohlordnung. für $x \in W$, $\mathrm{pred}_W(x) := \{y \in W \mid y < x\}$

Sei $X \subseteq W$ nach unten abgeschlossen, dann $X = W$

oder $\exists x \in W$: $X = \mathrm{pred}_W(x)$.

(<u>Bem</u>: bei W.O gibt es <u>nicht</u> ... x)

<u>Fund Satz über WO</u>: Seien $(W,<)$ und $(W',<')$ zwei WO.

Dann gilt:

(1) $(W,<) \cong (W',<')$, oder

(2) $(W,<) \cong \mathrm{pred}_{W'}(x)$ für $x \in W'$, oder

(3) $(W',<') \cong \mathrm{pred}_W(x)$ für $x \in W$.

<u>Folgt</u>: alle WO sind bis auf Isomorphie tot. geordnet. (auch Wohl-geordnet)

<u>Def</u>: Sei $(W,<)$ eine WO Dann ist

$$\text{Ordungstyp}(W,<) := [(W,<)]_{\cong}$$

<u>Idee</u>: wir brauchen <u>kanonische Räpresentanten</u> der Äq. Klassen $[(W,<)]_{\underline{\sim}}$

In der M.L haben wir eine ganz <u>kanonische</u> Relation: $\in$

<u>Bem</u>: $\in$ ist keine W.O (nicht transitiv, nicht total, (ohne Fundation) auch nich unbedingt irrefl. oder fundiert)

<u>DEF</u>: α ist eine <u>Ordinalzahl</u> wenn α eine <u>transitive</u> Menge ist und $(\alpha, \in)$ eine WO ist.

↳ X heisst <u>transitiv</u> wenn: $\forall x \in X, \forall y \in x: y \in X$

<u>Bem</u>: $\emptyset$ ist eine Ordinalzahl.

Oz := Klasse aller Ordinalzahlen

<u>Eigenschaften von Oz</u>:

(1) $\alpha \notin \alpha$ für alle α Oz

(2) Wenn α Oz und $\beta \in \alpha$, dann β auch Oz.

(3) $\alpha \neq \beta$ und $\alpha \subseteq \beta \iff \alpha \in \beta$

(4) $\alpha, \beta \in Oz$, dann $\alpha \cap \beta \in Oz$.

(5) $\alpha, \beta \in Oz$: $\alpha \subseteq \beta$ oder $\beta \subseteq \alpha$

<u>Beweis</u>: (1) Sonst wäre "$\alpha \in \alpha$" ein Widerspruch zu $(\alpha, \in)$ ist W.O.

(2) Sei $\beta \in \alpha$. Sei $\gamma \in \delta \in \beta$, z.z. $\gamma \in \beta$.
Da α trans. $\delta \in \alpha \to \gamma \in \alpha$. Also sind $\{\gamma, \delta, \beta\} \subseteq \alpha$. Da $(\alpha, \in)$ trans. folgt $\gamma \in \beta$. Also ist β trans.

<u>Ausserdem</u>: $(\beta, \in) \subseteq (\alpha, \in)$ weil:

Für $\delta \in \beta$ gilt $\delta \in \beta \in \alpha$, also $\delta \in \alpha$. Darum $\beta \subseteq \alpha$

Also $(\beta, \in)$ auch W.O.

(3) $\Leftarrow$: wie oben

$\Rightarrow$: Sei $\alpha \neq \beta$, $\alpha \subseteq \beta$.

Dann ist α nach-unten abgeschlossen (weil $\delta \in \gamma \in \alpha \rightarrow \delta \in \alpha$)

Nach Satz (*)

ist also $\alpha = \mathrm{pred}_{(\beta,\in)}(\theta)$ für ein $\theta \in \beta$

Also: $\gamma \in \alpha \iff \gamma \in \beta \wedge \gamma \in \theta$

$\iff \gamma \in \theta$

Darum: $\alpha = \theta \in \beta$.

(4) Trivial

(5) Sei α, β beliebig, sei $\gamma := \alpha \cap \beta$

$\gamma \subseteq \alpha$ und $\gamma \subseteq \beta$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Wenn aber } \gamma \neq \alpha \overset{(3)}{\Longrightarrow} \gamma \in \alpha \\ \text{und } \gamma \neq \beta \overset{(3)}{\Longrightarrow} \gamma \in \beta \end{array}\right\} \gamma \in \alpha \cap \beta \rightarrow \gamma \in \gamma \ ↯$$

Bem: Um die "doppelte Rolle" von $\in$ nicht zu verwirren, ist es hilfreich, zu definieren:

$$\boxed{\alpha < \beta \quad :\iff \quad \alpha \in \beta}$$

Daraus, und (3), folgt:

$$\boxed{\alpha \leq \beta \iff \alpha \in \beta \text{ oder } \alpha = \beta \overset{(3)}{\iff} \alpha \subseteq \beta}$$

Auch: $\alpha < \beta \iff \alpha \subsetneq \beta$

Daraus folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= \{\beta \mid \beta \in \alpha\} \\ &\overset{(1)}{=} \{\beta \in Oz \mid \beta \in \alpha\} \\ &= \{\beta \in Oz \mid \beta < \alpha\} \end{aligned}}$$

(Genauso wie: $7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$)

Def: Sei α eine Oz. Dann heisst

$$\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$$

der Nachfolger von α

Lemma: $\alpha + 1$ ist die kleinste Oz $> \alpha$.

Bew: Aufgabe.

$$\left(\begin{aligned} \alpha \cup \{\alpha\} &= \{\beta \mid \beta \in \alpha \vee \beta = \alpha\} \\ &= \{\beta \mid \beta \leq \alpha\} = \{\beta \mid \beta < \text{"}\alpha+1\text{"}\} = \text{"}\alpha+1\text{"} \end{aligned} \right)$$

Weitere Eigenschaften:

(1) Wenn $C \subseteq Oz$ eine $\neq \emptyset$ Menge, dann ist $\bigcap C$ auch O.Z.,
$\bigcap C \in C$ und $\bigcap C = \inf(C)$ (hinsichtlich $<$, was auch $\in$ ist)

(2) Wenn $C \subseteq Oz$ eine $\neq \emptyset$ Menge, dann ist $\bigcup C$ auch in Oz
$\bigcup C = \sup(C)$

(3) $<$ ist eine (Klassen)-Wohlordnung auf Oz.

Korollar: Oz ist keine Menge

Bew. Oz ist transitiv (nach (2))
und $(Oz, \in)$ wohlfundiert.
Wäre Oz eine Menge, dann wäre
$Oz \in Oz$ ↯.

Beispiele: (1) $\emptyset \in Oz$, wir nennen sie 0.
(2) Alle $n \in \mathbb{N}$ sind Oz.
(3) $\omega := \mathbb{N}$ ist auch eine Oz.
(4) $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$ auch Oz
(5) "$\omega + n$" ist Oz für jede n.
(6) "$\omega + \omega$" $:= \bigcup_{n \in \omega}$ "$\omega + n$"

usw.

Frage: gibt es überabzählbare O.Z?

Theorem von Hartog (Ausw.axiom wird nicht benutzt)

Es gibt eine überabz. O.Z.

Bew. zu zeigen: $A := \{\alpha \in Oz \mid \alpha \text{ abzählbar}\}$
ist eine Menge, nämlich dann ist
$\beta = A \in Oz$. Aber dann ist β überabz.
denn sonst wäre $\beta \in \beta$ ↯

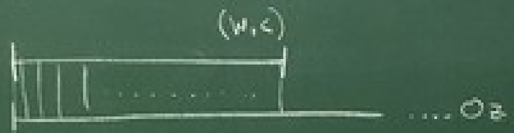
Also sei $WO_{abz} := \{(W,R) \mid W \subseteq \mathbb{N} \text{ und } (W,R) \text{ eine WO}\}$

Def: $f: WO_{abz}$

(3) Sei α, β beliebig, sei $\gamma := \alpha \cap \beta$
$\gamma \subseteq \alpha$ und $\gamma \subseteq \beta$
Wenn aber $\gamma \neq \alpha \xrightarrow{(3)} \gamma \in \alpha$
und $\gamma \neq \beta \xrightarrow{(3)} \gamma \in \beta$ $\Big\}$ $\gamma \in \alpha \cap \beta \rightarrow \gamma \in \gamma$ ↯

Theorem: Jede W.O $(W,<)$ ist isomorph mit $(\alpha, \in)$ für eine $\alpha \in Oz$

Bew:



Def: $F: W \rightarrow Oz$

$$x \mapsto \begin{cases} \alpha & \text{wenn } \mathrm{pred}_W(x) \cong \alpha \text{ für eine } \alpha \in Oz \\ \text{undef.} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beh 1. F ist auf W definiert.

Beh 1. $\mathrm{dom}(F) = W$

Bew: Sonst sei $b \in W$ minimal so dass $b \notin \mathrm{dom}(F)$.

Dann ist F aber auf $\mathrm{pred}_W(b)$ definiert

$\Rightarrow$ $\forall c < b$ gibt es α_c so dass $\mathrm{pred}_W(c) \cong \alpha_c$

Fall 1: $\exists c$ so dass $\nexists c' \in W$ $c < c' < b$

Dann ist $\mathrm{pred}_W(c) \cong \alpha \Rightarrow \mathrm{pred}(b) = \mathrm{pred}(c) \cup \{c\}$

$\cong \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$.

Fall 2. $\forall c < b \ \exists c' \ (c < c' < b)$

Dann sei α_c so dass $\alpha_c \cong \mathrm{pred}(c)$ $\forall c < b$.

Dann ist $\mathrm{pred}(b) \cong \bigcup \{\alpha_c \mid c < b\}$

nämlich: Für $x \in \mathrm{pred}(b)$ gibt es

$c < b$ so dass $x \in \mathrm{pred}(c)$

$\Rightarrow$ x wird abgebildet nach $\in \alpha_c$

Dann ist das ein isom von $\mathrm{pred}(b)$ nach $\bigcup\{\alpha_c \mid c < b\} \in O_Z$

Also $b \in \mathrm{dom}(F) \Rightarrow$ nicht minimal ↯

Nach Ers. ist $F[W]$ ein Menge $\subseteq O_Z$

Dann $\exists \gamma \in O_Z \setminus F[W]$

Sei γ kleinste in $O_Z \setminus F[W]$

Dann gilt $\beta \in \gamma \longleftrightarrow \beta \in F[W]$

$\Rightarrow F[W] = \gamma \in O_Z$.

Also ist F ein isomorphismus von $(W, <)$ nach $(\gamma, \in)$

$\square$

..., weiter mit <u>Hartog</u>

.... def $f: WO_{abz} \longrightarrow Oz$

$(W,R) \longmapsto \alpha$ so dass $(\alpha,\in) \cong (W,R)$

Dann <u>behaupten</u> wir: $f[WO_{abz}] = \{\alpha \mid \alpha \text{ abzählbar}\}$

Warum ist das so? $\subseteq$ offensichtlich

$\supseteq$: wenn α abz. dann gibt es

inj $i: \alpha \hookrightarrow \mathbb{N}$

Dann ist $(\alpha,\in) \cong (W,R)$ wo

$W := i[\alpha]$

und

$n R m \iff i^{-1}(n) \in i^{-1}(m)$

Also $f[WO_{abz}] = \{\alpha \mid \alpha \text{ abz.}\}$

und das ist eine <u>Menge</u> wegen Ers. $\square$

<u>Definition</u>: Eine Oz α so dass $\alpha = \beta+1$ für ein β nennen wir <u>Nachfolgerordinalzahl</u>

Sonst <u>Limes-Ordinalzahl</u>

<u>Beispiel</u>:
0 ist Limes Oz
$n \neq 0$ sind Nachfolger Oz
ω ist Limes Oz
$\omega+1$ Nachfolger
$\vdots$

Oz α Nachfolger

λ Limes Oz