PROBABILISTISCHE KONSTRUKTIONEN FÜR DAS BIPARTITE TURÁN-PROBLEM

MATHIAS SCHACHT

Zusammenfassung. Wir entwickeln eine untere Schranke für die mögliche Kantendichte von $K_{t,t}$-freien Graphen durch zufällige Graphen.

§1 Extremale Graphentheorie

Für $n \in \mathbb{N}$ und einen Graphen F ist die Extremalfunktion $\mathrm{ex}(n, F)$ definiert durch

$$\mathrm{ex}(n, F) = \max\{e(G)\colon |V(G)| = n \text{ und } G \text{ ist } F\text{-frei}\}\,.$$

Für den Fall, wenn $F = K_{k+1}$ eine Clique ist, besagt der Satz von Turán [5]

$$\mathrm{ex}(n, K_k) = e(T_{n,k})\,,$$

wobei $T_{n,k}$ der vollständig k-partite Graph auf n Ecken ist, in dem jede Eckenklasse aus $\lfloor n/k \rfloor$ oder $\lceil n/k \rceil$ Ecken besteht. Insbesondere gilt $\mathrm{ex}(n, K_{k+1}) = \big(\frac{k-1}{k} + o(1)\big)\binom{n}{2}$ für jede natürliche Zahl $k \geqslant 1$. Die Sätze von Erdős und Stone [2] und von Erdős und Simonovits [1] verallgemeinern dies für $(k+1)$-färbbare Graphen F und so gilt für jeden Graphen F

$$\mathrm{ex}(n, F) = \Big(\frac{\chi(F) - 2}{\chi(F) - 1} + o(1)\Big)\binom{n}{2}\,.$$

Für bipartite Graphen F, also für den Fall $k = 1$, erhalten wir somit $\mathrm{ex}(n, F) = o(n^2)$ und es stellt sich die Frage, ob diese Funktion überhaupt quadratisch in n ist bzw. in weit sich bessere Exponenten bestimmen lassen. Dies wird teilweise durch dan Satz von Kövari, Sós und Turán [4] beantwortet, der mithilfe des doppelten Abzählen die obere Schranke

$$\mathrm{ex}(n, K_{t,t}) = O(n^{2-1/t})$$

etabliert. Für $t = 2$ zeigen Inzidenzgraphen endlicher projektiver Ebenen, dass diese Schranke asymptotisch bestmöglich ist, d. h. $\mathrm{ex}(n, K_{2,2}) = \Theta(n^{3/2})$. Für allgemeines t ist es ein bekanntes offenes Problem gute untere Schranken zu bestimmen. Im Folgenden werden wir mithilfe von Zufallsgraphen eine allgemeine untere Schranke etablieren.

Proposition 1. *Für alle natürlichen Zahlen $t \geqslant 2$ gilt* $\mathrm{ex}(n, K_{t,t}) \geqslant \Omega\big(n^{2-\frac{2}{t+1}}\big)$.

§2 Zufallsgraphen

In dem Beweis von Proposition 1 werden wir auf den binomialen Zufallsgraphen $G(n,p)$ zurückgreifen. Der Zufallsgraph $G(n,p)$ ist ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum auf der Menge aller Graphen mit Eckenmenge $[n]$, der durch die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse

$$\mathbb{P}\big(G(n,p) = G\big) = \mathbb{P}\big(\{G\}\big) = p^{|E_G|}(1-p)^{\binom{n}{2}-|E_G|}$$

für jeden Graphen $G = ([n], E_G)$ definiert ist. In anderen Worten der Zufallsgraph $G(n,p)$ ist der Wahrscheinlichkeitsraum, in dem für jedes mögliche Paar $\{x,y\}$ von verschiedenen Ecken die Kante $\{x,y\}$ mit Wahrscheinlichkeit p präsent ist und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ nicht und alle diese $\binom{n}{2}$ Ereignisse sind gemeinsam unabhängig.

Zentrale Hilfsmittel aus der Stochastik sind Abschätzungen für die Wahrscheinlichkeiten das Zufallsvariablen vom Erwartungswert abweichen. Eine universelle Ungleichung von diesem Typ ist die Ungleichung von Markoff.

Satz 2 (Markoff'sche Ungleichung)**.** *Sei $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ eine nicht-negative Zufallsvariable eines Wahrscheinlichkeitsraumes Ω. Dann gilt für jedes $a > 1$*

$$\mathbb{P}\big(X \geqslant a \cdot \mathbb{E}X\big) \leqslant \frac{1}{a}\,. \qquad \square$$

Die Anzahl der Kanten des Zufallsgraphen $G(n,p)$ ist binomialverteilt, d. h. es ist die Summe von $\binom{n}{2}$ unabhängigen Bernoulli-Zufallsvariablen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Die Verteilung binomialverteilte Zufallsvariablen ist um den Erwartungswert konzentriert und dafür diese sind sehr gute Abschätzungen bekannt. Wir werden hier die Chernoff-Schranke für die Abweichung vom Erwartungswert nach unten verwenden (siehe z. B. das Buch von Janson, Łuczak und Ruciński [3, Theorem 2.1]).

Satz 3 (Chernoff'sche Ungleichung)**.** *Sei $X = \sum_{i=1}^{m} X_i$ eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern m und p. Dann ist $\mathbb{E}X = pm$ und für jedes $t \geqslant 0$ gilt*

$$\mathbb{P}\big(X < \mathbb{E}X - t\big) \leqslant \exp\Big(-\frac{t^2}{2\mathbb{E}X}\Big) \qquad \square$$

Mithilfe der Sätze 2 und 3 werden wir die untere Schranke für das bipartite Turán-Problem entwickeln.

§3 Probabilistische untere Schranken für das bipartite Turán-Problen

Zuerst werden wir eine schwächere Schranke beweisen und den Beweis danach verbessern, um Proposition 1 herzuleiten.

Lemma. *Für alle natürlichen Zahlen $t \geqslant 2$ gilt $\mathrm{ex}(n, K_{t,t}) \geqslant \Omega\big(n^{2-\frac{2}{t}}\big)$.*

In dem Beweis des Lemmas zeigen wir, dass $G(n,p)$ für hinreichend kleines $c>0$ und $p=cn^{-2/t}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit $K_{t,t}$-frei ist und $\Omega(n^{2-\frac{2}{t}})$ Kanten enthält.

Beweis. Für eine natürliche Zahl $t\geqslant 2$ setzen wir

$$c=\frac{1}{3}\quad\text{und}\quad p=cn^{-2/t}$$

und sei n hinreichend groß gewählt. Wir untersuchen die Wahrscheinlichkeiten der folgenden beiden wünschenswerten Ereignisse

$$\mathcal{A}=\big\{G\colon V(G)=[n]\text{ und }G\text{ ist }K_{t,t}\text{-frei}\big\}\text{ und }\mathcal{B}=\big\{G\colon V(G)=[n]\text{ und }|E(G)|\geqslant \tfrac{p}{2}\tbinom{n}{2}\big\}$$

für den Zufallsgraphen $G(n,p)$.

Im Folgenden werden wir zeigen

$$\mathbb{P}(\mathcal{A})\geqslant\frac{2}{3}\quad\text{und}\quad\mathbb{P}(\mathcal{B})\geqslant\frac{2}{3}\tag{3.1}$$

und somit folgt

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})=1-\mathbb{P}(\neg(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}))=1-\mathbb{P}(\neg\mathcal{A}\cup\neg\mathcal{B})\geqslant 1-\mathbb{P}(\neg\mathcal{A})-\mathbb{P}(\neg\mathcal{B})\geqslant 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}>0\,.$$

Insbesondere gibt es dann einen $K_{t,t}$-freien Graphen G mit n Ecken und für $n\geqslant 5$ gilt

$$|E(G)|\geqslant\frac{p}{2}\binom{n}{2}\geqslant\frac{p}{5}n^2=\frac{c}{5}n^{2-2/t}\,.$$

Somit sind für den Beweis des Lemmas nur noch die Abschätzungen (3.1) nachzuweisen.

Für das Ereignis $\mathcal{A}$ sei X_t die Zufallsvariable über die Anzahl der markierten Kopien von $K_{t,t}$. Wir können X_t als Summe über $n(n-1)\cdots(n-2t+1)\leqslant n^{2t}$ Indikatorzufallsvariablen über jede einzelne mögliche Platzierung einer Kopie von $K_{t,t}$ schreiben. Der Erwartungswert dieser Indikatorzufallsvariablen ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf der entsprechenden Platzierung alle t^2 Kanten des $K_{t,t}$ vorhanden sind, d. h. diese Wahrscheinlichkeit ist p^{t^2}. Somit ergibt sich mit der Linearität des Erwartungswertes

$$\mathbb{E}X_t\leqslant n^{2t}\cdot p^{t^2}=n^{2t}\cdot\big(cn^{-2/t}\big)^{t^2}=n^{2t}\cdot c^{t^2}n^{-2t}=c^{t^2}\leqslant\frac{1}{3}\,.$$

Satz 2 impliziert somit

$$\mathbb{P}(\neg\mathcal{A})=\mathbb{P}(X_t\geqslant 1)\leqslant\mathbb{E}X_t\leqslant\frac{1}{3}$$

und die erste Abschätzung in (3.1) ist damit bewiesen.

Für das Ereignis $\mathcal{B}$ greifen wir direkt auf Satz 3 mit $m=\binom{n}{2}$ und $t=p\binom{n}{2}/2$ zurück, da die Anzahl der Kanten im $G(n,p)$ eine binomialverteilte Zufallsvariable ist. Damit erhalten wir

$$\mathbb{P}(\neg\mathcal{B})\leqslant\exp\Big(-\frac{\big(p\binom{n}{2}/2\big)^2}{2p\binom{n}{2}}\Big)=\exp\Big(-\frac{p}{8}\binom{n}{2}\Big)\,.$$

Da unsere Wahl von p mit viel Luft $pn^2 \longrightarrow \infty$ für $n \longrightarrow \infty$ nach sich zieht, folgt somit auch die zweite Abschätzung in (3.1) für hinreichend großes n. $\square$

Der soeben geführte Beweis lässt sich dadurch optimieren, dass wir nicht $\mathbb{E}X_t < 1/3$ verlangen, sondern $p\binom{n}{2}/8$ Kopien von $K_{t,t}$ zulassen. Dies ermöglicht uns eine größere Wahl von p und dadurch die Betrachtung dichterer Graphen. In einem ersten Schritt würden wir über eine analoge Analyse des Zufallsgraphen $G(n,p)$ die Existenz eines Graphen G mit mindestens $p\binom{n}{2}/2$ Kanten und höchstens $p\binom{n}{2}/4$ Kopien von $K_{t,t}$ etablieren. In einem zweiten Schritt entfernen wir dann von jeder dieser Kopien eine Kante und erhalten so einen $K_{t,t}$-freien Teilgraphen $H \subseteq G$ mit mindestens $p\binom{n}{2}/2$ Kanten. Der folgende Beweis beruht auf diesem Ansatz. Zusätzlich wenden wir noch einen kleinen Trick an und können so sogar die Anwendungen der Sätze 2 und 3 vermeiden.

Beweis von Proposition 1. Für eine natürliche Zahl $t \geqslant 2$ setzen wir

$$c = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad p = cn^{-\frac{2}{t+1}}$$

und sei n hinreichend groß gewählt. Sei Y die Zufallsvariable der Anzahl der Kanten und sei X_t die Zufallsvariable über die Anzahl der markierten Kopien von $K_{t,t}$. Aufgrund der Linearität des Erwartungswertes haben wir

$$\mathbb{E}[Y - X_t] = \mathbb{E}Y - \mathbb{E}X_t \geqslant p\binom{n}{2} - p^{t^2}n^{2t}\,.$$

Aus der Wahl von p folgt

$$p^{t^2}n^{2t} = (pn^2)\cdot\left(cn^{-\frac{2}{t+1}}\right)^{t^2-1}\cdot n^{2t-2} = c^{t^2-1}pn^2 \leqslant \frac{1}{3}pn^2$$

und für hinreichend großes n erhalten wir

$$\mathbb{E}[Y - X_t] \geqslant p\binom{n}{2} - \frac{1}{3}pn^2 \geqslant \frac{pn^2}{10} = \frac{1}{30}n^{2-\frac{2}{t+1}}\,.$$

Insbesondere gibt es also einen Graphen G der einen Teilgraphen H enthält, den wir dadurch erhalten, dass wir von jeder Kopie von $K_{t,t}$ eine Kante entfernen, mit

$$|E(H)| \geqslant \mathbb{E}[Y - X_t] \geqslant \frac{1}{30}n^{2-\frac{2}{t+1}}$$

und Proposition 1 ist bewiesen. $\square$

Literatur

[1] P. Erdős and M. Simonovits, *A limit theorem in graph theory*, Studia Sci. Math. Hungar. **1** (1966), 51–57. MR205876 ↑1

[2] P. Erdős and A. H. Stone, *On the structure of linear graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 1087–1091, DOI 10.1090/S0002-9904-1946-08715-7. MR18807 ↑1

[3] S. Janson, T. Łuczak, and A. Ruciński, *Random graphs*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley-Interscience, New York, 2000. MR1782847 ↑2

[4] T. Kővari, V. T. Sós, and P. Turán, *On a problem of K. Zarankiewicz*, Colloq. Math. **3** (1954), 50–57, DOI 10.4064/cm-3-1-50-57. MR65617 ↑1

[5] P. Turán, *Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie*, Mat. Fiz. Lapok **48** (1941), 436–452 (Hungarian, with German summary). MR18405 ↑1

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg, Hamburg, Germany
Email address: `schacht@math.uni-hamburg.de`