Übungsblatt 9

Berechenbarkeitstheorie
Wintersemester 2012/13
Universität Hamburg

Schriftliche Abgabe am Anfang der Übung am 10. Januar 2013.

1. Die Struktur $(\mathcal{D}_\mathrm{T}, \leq_\mathrm{T})$ besteht aus den $\equiv_\mathrm{T}$-Äquivalenzklassen von Teilmengen von $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{D}_\mathrm{T}$ überabzählbar ist.

2. Sei $\mathbf{d} \in \mathcal{D}_\mathrm{T}$. Wir wollen eine Menge $A \subseteq \mathcal{D}_\mathrm{T}$ eine *Antikette unterhalb von* $\mathbf{d}$ nennen, falls

   (a) für alle $\mathbf{a} \in A$ gilt, daß $\mathbf{a} \leq_\mathrm{T} \mathbf{d}$;

   (b) für je zwei $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in A$ gilt, daß $\mathbf{a} \not\leq_\mathrm{T} \mathbf{b}$ und $\mathbf{b} \not\leq_\mathrm{T} \mathbf{a}$.

   Wir sagen, daß eine partielle Ordnung $(P, \leq)$ die *lokale abzählbare Antiketteneigenschaft* hat, falls für jedes $p \in P$ gilt, daß jede Antikette unterhalb von p höchstens abzählbar ist.

   Zeigen Sie, daß $(\mathcal{D}_\mathrm{T}, \leq_\mathrm{T})$ die lokale abzählbare Antiketteneigenschaft hat.

3. Es sei H^H das Halteproblem relativ zum Halteproblem, also eine Menge in $\mathbf{0}''$. Beweisen Sie, daß die folgenden Aussagen für eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ äquivalent sind:

   (a) $A \leq_\mathrm{T} H^H$, und

   (b) es gibt eine berechenbare totale Funktion $f : \mathbb{N}^3 \to \{0, 1\}$, so daß für alle x gilt:

   $$x \in A \text{ genau dann, wenn } \lim_{y\to\infty} \lim_{z\to\infty} f(x, y, z) = 1.$$

4. Wir nennen eine Menge D *d.c.e.* ("Differenz von c.e. Mengen"), falls es c.e. Mengen A und B gibt, so daß $D = A \backslash B$. Wir nennen eine Menge V *1-vollständig für d.c.e. Mengen*, falls sie d.c.e. ist und falls für jede d.c.e. Menge D gilt, daß $D \leq_1 V$. Zeigen Sie:

   (a) Jede co-c.e. Menge ist d.c.e.

   (b) Der Schnitt von zwei d.c.e. Mengen ist d.c.e.

   (c) Die Indexmenge $\{e\,;\, W_e \text{ hat exakt ein Element}\}$ ist d.c.e., aber nicht c.e.

   (d) Die Menge $H \times (\mathbb{N} \backslash H)$ (übliches kartesisches Produkt) ist 1-vollständig für d.c.e. Mengen.