Übungsblatt 8

Berechenbarkeitstheorie
Wintersemester 2012/13
Universität Hamburg

Schriftliche Abgabe am Anfang der Übung am 20. Dezember 2012.

1. Zeigen Sie, daß es jeweils ein n gibt, so daß
   (a) $W_n = \{m\,;\, n|m\} = \{m\,;\, n \text{ teilt } m\}$;
   (b) $\varphi_n = \mathrm{const}_n$ (die Funktion, die konstant gleich n ist);
   (c) $\varphi_n = p_n$ mit $p_n(x) := x^n$.

2. Wir nennen einen Index e *minimal*, falls er minimal in der Indexmenge $\{x\,;\, \varphi_x = \varphi_e\}$ ist. Sei M die Menge der minimalen Indizes. Zeigen Sie:
   (a) M ist unendlich.
   (b) Es gibt keine unendliche Teilmenge von M, die c.e. ist.

   Hinweis für (b). Zeigen Sie zunächst, daß eine unendliche c.e. Menge das Bild einer streng monoton steigenden, totalen berechenbaren Funktion ist.

3. Wir hatten eine Menge A *selbstdual* genannt, falls $A \equiv_{\mathrm{m}} \mathbb{N}\backslash A$. Zeigen Sie, daß keine Indexmenge selbstdual sein kann.

4. Zeigen Sie den *Kleeneschen Rekursionssatz mit Parametern*: Falls $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ eine totale berechenbare Funktion ist, so gibt es eine injektive berechenbare Funktion $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so daß für alle x gilt:
   $$\varphi_{n(x)} = \varphi_{f(n(x),x)}.$$
   Hinweis. Folgen Sie der Beweisidee des Rekursionssatzes.