Übungsblatt 7

Berechenbarkeitstheorie
Wintersemester 2012/13
Universität Hamburg

Schriftliche Abgabe am Anfang der Übung am 13. Dezember 2012.

1. Zwei disjunkte Mengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ heißen *berechenbar separabel*, falls eine berechenbare Menge C existiert, so daß $A \subseteq C$ und $B \cap C = \varnothing$. Zeigen Sie, daß die Mengen

$$A := \{x\,;\, \varphi_x(x)\downarrow = 0\} \text{ und } B := \{x\,;\, \varphi_x(x)\downarrow = 1\}$$

   nicht berechenbar separabel sind.

2. Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von Mengen. Wir wollen sagen, daß $\mathcal{C}$ die *Reduktionseigenschaft* habe, falls für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{C}$ disjunkte Mengen $A^*, B^* \in \mathcal{C}$ existieren, so daß $A^* \subseteq A$, $B^* \subseteq B$ und $A^* \cup B^* = A \cup B$. Wir wollen sagen, daß $\mathcal{C}$ die *Separationseigenschaft* hat, falls für je zwei disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{C}$ ein C existiert, so daß $C, \mathbb{N}\backslash C \in \mathcal{C}$ mit $A \subseteq C$ und $B \cap C = \varnothing$. [Der Reduktionssatz sagt gerade, daß die Klasse der c.e. Mengen die Reduktionseigenschaft hat.]

   Falls $\mathcal{C}$ eine Klasse von Mengen ist, so sei $\overline{\mathcal{C}} := \{X\,;\, \mathbb{N}\backslash X \in \mathcal{C}\}$ die *duale Klasse zu $\mathcal{C}$*.

   Zeigen Sie für jede Klasse $\mathcal{C}$: die Klasse $\mathcal{C}$ hat die Reduktionseigenschaft genau dann, wenn die Klasse $\overline{\mathcal{C}}$ die Separationseigenschaft hat.

3. Sei A eine c.e. Menge und f eine partielle berechenbare Funktion. Zeigen Sie, daß $\{x\,;\, \exists y \in A(f(x)\downarrow = y)\}$ c.e. ist.

4. Sei f eine totale Funktion. Zeigen Sie, daß f berechenbar ist genau dann, wenn der Graph von f eine berechenbare Menge ist.

5. Zeigen Sie, daß jede unendliche c.e. Menge eine unendliche berechenbare Teilmenge enthält.