Übungsblatt 11

Berechenbarkeitstheorie
Wintersemester 2012/13
Universität Hamburg

Schriftliche Abgabe am Anfang der Übung am 24. Januar 2013.

1. Falls $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so definieren wir $\mathrm{p}(A) := \{x\,;\, \exists y((x, y) \in A)\}$ und nennen dies die *Projektion von* A. Falls $\mathcal{B}$ eine Menge von Teilmengen von $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ ist, so sei die *Projektionsalgebra über* $\mathcal{B}$ die kleinste Familie von Mengen $\mathcal{X}$, so daß $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ und es gilt:

   (a) Falls $A \in \mathcal{X}$, so ist $\mathrm{p}(A) \in \mathcal{X}$.

   (b) Falls $A \in \mathcal{X}$ und $A \subseteq \mathbb{N}^k$, so ist $\mathbb{N}^k \backslash A \in \mathcal{X}$.

   Zeigen Sie, daß jede arithmetische Menge in der Projektionsalgebra über den berechenbaren Mengen liegt.

2. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen für eine Menge A äquivalent sind:

   (a) A ist Σ^0_n-vollständig (d.h.: für alle Σ^0_n-Mengen B gilt $B \leq_{\mathrm{m}} A$), und

   (b) für alle Σ^0_n-Mengen B gilt $B \leq_1 A$.

3. Zeigen Sie:

   (a) Die Menge $\{(x, y)\,;\, W_x \subseteq W_y\}$ ist Π^0_2.

   (b) Die Menge $\{(x, y)\,;\, W_x = W_y\}$ ist Π^0_2.

   (c) Die Menge Tot ist Π^0_2.

   (d) Die Menge Ext ist Σ^0_3.