Satz von Dekker

Berechenbarkeitstheorie
Wintersemester 2012/13
Universität Hamburg

Es sei B eine unendliche c.e. Menge. Es gibt f total, berechenbar und injektiv, so daß $B := \operatorname{ran}(f)$. Im allgemeinen ist f **nicht** monoton. Wir definieren die folgenden Approximationen zu B:

$$B_s := \{f(0), ..., f(s)\}.$$

Definiere $B^* := \{x\,;\, \exists y > x(f(y) < f(x))\}$. Man beachte, dass B^* c.e. ist.

Theorem (Satz von Dekker). Es gilt, daß $B \equiv_{\mathrm{T}} B^*$. Falls B nicht berechenbar ist, so ist B^* einfach.

Lemma. Falls $s \notin B^*$, so gilt

$$B_s \cap \{0, ..., f(s)\} = B \cap \{0, ..., f(s)\}.$$

Beweis des Lemmas. Da $B_s \subseteq B$, gilt ohnehin

$$B_s \cap \{0, ..., f(s)\} \subseteq B \cap \{0, ..., f(s)\}.$$

Sei also $x \in B \cap \{0, ..., f(s)\}$. Da $B = \operatorname{ran}(f)$, gibt es z mit $x = f(z)$. Wir müssen zeigen, daß $f(z) = x \in B_s$, oder, äquivalent dazu, daß $z \leq s$.

Angenommen, $z > s$. Da $s \notin B^*$, gilt für alle $t > s$, daß $f(t) > f(s)$ (die strikte Ungleichung verwendet die Injektivität von f), also auch $f(z) > f(s)$, aber dies steht im Widerspruch zu $x \in \{0, ..., f(s)\}$. q.e.d.

Beweis des Theorems. Wir teilen den Beweis in vier Behauptungen auf. Behauptungen 1 bis 3 zeigen $B \equiv_{\mathrm{T}} B^*$ und verwenden keine zusätzlichen Voraussetzungen.

Behauptung 1. $\mathbb{N}\backslash B^*$ ist unendlich.

[Angenommen nicht, dann gibt es ein maximales Element x (also $\{z\,;\, z > x\} \subseteq B^*$). Wir definieren rekursiv

$$\begin{aligned} x_0 &:= x + 1 \\ x_{i+1} &:= \text{das kleinste } y > x_i \text{ mit } f(y) < f(x_i). \end{aligned}$$

(Dieses y existiert nach Annahme.) Dann gilt für alle i, daß $f(x_{i+1}) < f(x_i)$, also bildet die Familie $\{f(x_i)\,;\, i \in \mathbb{N}\}$ eine absteigende Kette in den natürlichen Zahlen, im Widerspruch zur Fundiertheit von $\mathbb{N}$.]

Behauptung 2. $B^* \leq_{\mathrm{T}} B$.

[Wir beschreiben einen Algorithmus, der für die Eingabe x und das Orakel B entscheidet, ob $x \in B^*$ ist.

Zunächst berechnen wir die Mengen B_x und $B \cap \{0, ..., f(x)\}$ (letzteres verwendet das Orakel B). Falls

$$B \cap \{0, ..., f(x)\} \backslash B_x \neq \varnothing, \tag{*}$$

geben wir aus, daß $x \in B$; sonst geben wir aus, daß $x \notin B$.

Wir beweisen nun die Korrektheit dieses Algorithmus: falls (*) gilt, so gibt es ein $y \in B \cap \{0, ..., f(x)\} \backslash B_x$. Da $y \in B$, existiert ein z mit $f(z) = y$. Da $y \notin B_x$, gilt $z > x$. Aber $f(z) = y \in \{0, ..., f(x)\}$, also $f(z) < f(x)$ (die strikte Ungleichung verwendet wieder die Injektivität von f). Also gilt $x \in B^*$.

Umgekehrt, falls $x \in B^*$, so gibt es $y > x$ mit $f(y) < f(x)$. Das heißt, daß $f(y) \in B \cap \{0, ..., f(x)\} \backslash B_x$; also gilt (*).]

Behauptung 3. $B \leq_{\mathrm{T}} B^*$.

[Wir beschreiben einen Algorithmus, der für die Eingabe x und das Orakel B^* entscheidet, ob $x \in B$ ist.

Nach Behauptung 1 ist $\mathbb{N} \backslash B^*$ unendlich. Mit Hilfe des Orakels B^* durchlaufen wir systematisch $\mathbb{N} \backslash B^*$, bis wir ein $s \notin B^*$ finden, so daß $f(s) > x$ (wir finden ein solches, weil f injektiv ist und $\mathbb{N} \backslash B^*$ unendlich). Wir berechnen die Menge B_s (dafür ist kein Orakel nötig). Falls $x \in B_s$, so geben wir aus, daß $x \in B$; ansonsten geben wir aus, daß $x \notin B$.

Wir beweisen nun die Korrektheit des Algorithmus: da $x < f(s)$, gilt $x \in \{0, ..., f(s)\}$. Nun gibt uns das Lemma, daß $x \in B_s \iff x \in B$.]

Behauptung 4. Falls das Komplement von B^* eine unendliche c.e. Menge enthält, so ist B berechenbar.

[Angenommen W_e sei unendlich und $W_e \cap B^* = \varnothing$. Wir geben einen Algorithmus an, der (ohne Orakel) entscheidet, ob $x \in B$.

Wir durchlaufen systematisch W_e und finden ein $s \in W_e$, so daß $f(s) > x$ (dies ist möglich, weil W_e unendlich war und f injektiv). Falls $x \in B_s$, so geben wir aus, daß $x \in B$; anderenfalls geben wir aus, daß $x \notin B$.

Wir beweisen nun die Korrektheit des Algorithmus: da $s \in W_e$ und $W_e \cap B^* = \varnothing$, gilt also, daß $s \notin B^*$. Da $x < f(s)$, haben wir, daß $x \in \{0, ..., f(s)\}$. Nun gibt uns das Lemma, daß $x \in B_s \iff x \in B$.]

Behauptungen 1 bis 4 beweisen das Theorem. q.e.d.