Universität Hamburg
Janko Latschev Sommer 2024

Elementare Dynamische Systeme

Projekt 4

In diesem Projekt beschäftigen wir uns mit dem Folgenraum

$$\Sigma = \Sigma_2 := \{\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \{0,1\}\} = \{\mathbf{x} = (x_0 x_1 x_2 \dots),\, x_k \in \{0,1\}\}$$

und der Shiftabbildung

$$\begin{aligned} \sigma : \Sigma &\to \Sigma \\ (x_0 x_1 x_2 x_3 \dots) &\mapsto (x_1, x_2 x_3 \dots), \end{aligned}$$

und ihren Verallgemeinerungen. In der Vorlesung hatten wir Σ mit Hilfe der Metrik

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}$$

zu einem metrischen Raum gemacht.

1. **a)** Welche Punkte $\mathbf{x} \in \Sigma$ haben genau den Abstand $\frac{1}{2}$ zum Punkt $\mathbf{y} = (000\dots)$?

b) Sei $\mathbf{y} = (000\dots)$ und $\mathbf{z} = (111\dots)$. Wieviele Punkte $\mathbf{x} \in \Sigma$ erfüllen die Gleichung

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2} d(\mathbf{y}, \mathbf{z})?$$

Welche Punkte sind das?

2. Sei $k \geq 0$ gegeben. Geben Sie einen expliziten (ε, δ)-Beweis dafür, dass die Projektion

$$\pi_k : \Sigma \to \{0,1\} \qquad , \qquad \mathbf{x} = (x_0 x_1 x_2 \dots) \mapsto x_k$$

stetig ist (auf dem Bildraum verwenden wir die diskrete Metrik mit $d(0,1) = 1$).

3. Entscheiden Sie für jede der folgenden Abbildungen $\Sigma \to \Sigma$, ob sie stetig ist (jeweils mit kurzer Begründung):

a) $F(x_0 x_1 x_2 \dots) := (0 x_0 x_1 x_2 \dots)$

b) $G(x_0 x_1 x_2 \dots) := (x_0 x_2 x_4 x_6 x_8 \dots)$

c) $H(x_0 x_1 x_2 \dots) := (y_0 y_1 y_2 \dots)$ mit $y_k = 1 - x_k$ für alle $k \geq 0$.

4. Sind die Shiftabbildung $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ und ihre zweite Iteration $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma : \Sigma \to \Sigma$ topologisch konjugiert zueinander?

Bitte wenden!

Wir betrachten nun statt Σ_2 den Raum

$$\Sigma_N := \{\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}\} = \{\mathbf{x} = (x_0 x_1 x_2 \ldots)\, x_k \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}\}$$

für $N > 2$, mit der Metrik

$$d_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{N^k}$$

und der Shiftabbildung

$$\sigma_N : \Sigma_N \to \Sigma_N \quad , \qquad (x_0 x_1 x_2 \ldots) \mapsto (x_1 x_2 x_3 \ldots).$$

5. **a)** Was ist der Durchmesser $d = \sup\{d_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \,|\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma_N\}$ des metrischen Raumes (Σ_N, d_N)?

b) Wird das Supremum angenommen? Falls ja, geben sie ein Beispiel zweier Punkte in Σ_N mit diesem maximalen Abstand.

6. Geben Sie bitte jeweils kurze Begründungen Ihrer Antworten.

a) Wieviele Fixpunkte hat σ_N?

b) Wieviele periodische Punkte der Periode 2 (nicht unbedingt minimal) hat σ_N?

c) Wieviele periodische Punkte der Periode $k \in \mathbb{N}$ hat σ_N?

d) Können $\sigma_N : \Sigma_N \to \Sigma_N$ und $\sigma_M : \Sigma_M \to \Sigma_M$ für $N \neq M$ topologisch konjugiert zueinander sein?

7. Beweisen Sie, dass $\sigma_N : \Sigma_N \to \Sigma_N$ chaotisch im Sinne der Definition von Devaney ist.