Universität Hamburg
Janko Latschev Sommer 2024

Elementare Dynamische Systeme

Projekt 3

In diesem Projekt beschäftigen wir uns mit der (Standard)-Cantor-Menge. Diese erhält man (bekanntlich) mit folgender rekursiven Konstruktion:

Wir definieren $C_0 := [0,1]$ und $C_1 := C_0 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, d.h. wir erhalten C_1, indem wir aus dem Intervall C_0 das offene mittlere Drittel entfernen. Es gilt also

$$C_1 := C_0 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Wir erhalten C_2 aus C_1, indem wir wiederum aus jedem dieser Intervalle das offene mittlere Drittel entfernen, d.h.

$$C_2 := C_1 \setminus \left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Im Allgemeinen besteht C_n aus 2^n abgeschlossenen Intervallen der Länge $\frac{1}{3^n}$, und man erhält C_{n+1}, indem man in jedem dieser Intervalle jeweils das mittlere offene Drittel entfernt. Die (Standard-)-Cantormenge ist dann definiert als

$$C := \bigcap_{n \geq 0} C_n.$$

1. **a)** Welche Teilintervalle werden bei der Konstruktion von C_3 aus C_2 entfernt?

b) Welche Teilintervalle werden bei der Konstruktion von C_4 aus C_3 entfernt?

2. Bestimmen Sie die Gesamtlänge der in der Konstruktion von C_n aus C_{n-1} entfernten Intervalle, und berechnen Sie daraus die Gesamtlänge aller bei der Konstruktion von C entfernten Intervalle.

Jede reelle Zahl $r \in [0,1]$ hat eine Darstellung bezüglich der Basis 3 als

$$r = (0.a_1 a_2 a_3 \ldots)_3 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{3^k} \tag{1}$$

mit Ziffern $a_k \in \{0,1,2\}$. Wie bei der Dezimaldarstellung ist diese *ternäre* Darstellung nicht eindeutig: eine Zahl mit der endlichen Darstellung $r = (0.a_1 a_2 \ldots a_k)_3$ mit $a_k \neq 0$ hat die alternative Darstellung $r = (0.a_1 a_2 \ldots a_{k-1}(a_k - 1)22222\ldots)_3 = (0.a_1 a_2 \ldots a_{k-1}(a_k-1)\overline{2})_3$. Zum Beispiel gilt

$$(0.1)_3 = (0.0\overline{2})_3 \quad \text{und} \quad (0.21201)_3 = (0.21200\overline{2})_3 \quad \text{und} \quad 1 = (0.\overline{2})_3.$$

3. Finden Sie die ternäre Darstellung von $r = \frac{1}{2}$.
Welche rationalen Zahlen haben die ternären Darstellungen $s = (0.\overline{20})_3$ bzw. $t = (0.\overline{021})_3$?

Bitte wenden!

4. Beweisen Sie: Eine reelle Zahl $r \in [0,1]$ gehört genau dann zu C, falls sie eine Darstellung (1) besitzt, in der die Ziffer 1 nicht vorkommt.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, was die erste Nachkomme-Ziffer in der ternären Darstellung von $r \in [0,1]$ über die Lage von r in $[0,1]$ aussagt? Was sagt die k-te Ziffer aus?

5. Wie erkennt man an der ternären Darstellung, ob eine Zahl $r \in C$ Endpunkt eines der entfernten offenen Intervalle ist?

6. Die Cantormenge ist die disjunkte Vereinigung der Menge C_e solcher Endpunkte und ihres Komplements C_n der "Nicht-Endpunkte". Haben die beiden Mengen C_e und C_n gleichviele Elemente, oder hat eine der beiden Mengen mehr Elemente als die andere? Falls die zweite Alternative gilt: welche der beiden Mengen ist größer?

7. Wir betrachten die Abbildung $D_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert als

$$D_3(x) = \begin{cases} 3x & \text{falls } x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 3x & \text{falls } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

a) Beschreiben Sie, wie man aus der ternären Darstellung von $x \in [0,1]$ die ternäre Darstellung von $D_3(x)$ erhält (es sind hier natürlich zwei Fälle zu unterscheiden).

b) Beweisen Sie, dass

$$C = \{x \in [0,1] \, : \, D_3^n(x) \in [0,1] \text{ für alle } n \geq 1\}.$$