Lineare Darstellungen von Symmetrischen Gruppen

150 232 (Holtkamp) 2st., Mi 12.00-14.00, NA 2/24

Beispiel 1. *Freies Monoid über Alphabet X*

Beispiel 2. $S_1, S_2, S_3, ...$

Satz 1. *(Bijektion zw. Partitionen von n und Konjugationsklassen von S_n)*

Satz 2. *($k_\lambda = ...$)*

Beispiel 3. *Triviale Darstellung, Sgn-Darstellung, Standard-Darstellung von S_n*

Beispiel 4. *Linksreguläre Darstellung ...*

Beispiel 5. $\mathbb{C}[\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \mathbf{n}]$

Beispiel 6. $\mathbb{C}[\underline{3}] = \mathbb{C}[\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}] \oplus \mathbb{C}[\mathbf{2} - \mathbf{1}, \mathbf{3} - \mathbf{1}]$ *als S_3-Modul.*

Satz 3. *(Maschke)*

Beispiel 7. $\mathbb{C}[\mathcal{H}], \mathcal{H} := \{H, (1,2)H, (1,3)H\}$, $H = S(\{2,3\}) \leq S_3$

Lemma 1. *(Schur)*

Beispiel 8. M^λ

Satz 4. $\mathbb{C}[S_n\{t^\lambda\}]$ *isomorph zur Restklassendarstellung von S_n bzgl. S_λ.*

Beispiel 9. *Fixpunkte zählen...*

Satz 5. *(Charakter-Gleichungen erster Art [die Zeilen]).*

Beispiel 10. *Charaktertafel von S_3*

Satz 6. *Multiplizitäten in $\mathbb{C}[G]$.*

Satz 7. *(Charakter-Gleichungen der zweiten Art: die Spalten)*

Satz 8. $d_G^{(i)} \otimes d_H^{(j)}$ *eine vollständige Liste aller irreduziblen $G \times H$-Moduln.*

5 Restriktion und Induktion

Beispiel 11. *Was ist $d_G = 1 \uparrow^G$, z.B. $1 \uparrow^G ((1,2))$?*

Satz 9. *(Induzierte Darstellung)*

Satz 10. *(Reziprozitätsgesetz von Frobenius)*

Wh:

Induktion von Klassenfunktionen definierte (bilineare) Verknüpfung $\mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ bzw. $\bullet : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ mit (für alle $\lambda_i \in \mathbb{N}$):

$ch_{\lambda_1.\ \dots\ .\lambda_k} = ch_{\lambda_1} \bullet \dots \bullet ch_{\lambda_k}$ unabhängig von Klammerung/Anordnung.

Definition.
Für $\rho \in Cl(S_n), n \in \mathbb{N}_0$, sei

$$\rho \downarrow := \sum_{k,l\in\mathbb{N}_0,k+l=n} \rho_k \otimes \rho_l \ \in \bigoplus_{k+l=n} Cl(S_k) \otimes Cl(S_l) \ \subseteq \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$$
$$\text{mit } \rho_k \otimes \rho_l = \rho \downarrow_{S_{k.l}} \in Cl(S_{k.l}) = Cl(S_k) \otimes Cl(S_l)$$

Man setzt linear fort zu einer Abbildung $() \downarrow: \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}, \rho \mapsto \rho \downarrow$.

Übg: Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $ch_n \downarrow = \sum_{k=n \text{ oder } l=n} ch_n \downarrow_{S_{k.l}} = ch_n \otimes 1 + 1 \otimes ch_n$.

Die Skalarprodukte $\langle , \rangle$ der $Cl(S_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, setzen sich zusammen zu einem Skalarprodukt auf $\mathcal{C}$, indem man $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0$ setzt, falls $\alpha_i \in S(n_i)$ mit $n_1 \neq n_2$.

Auf $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ ist ein Skalarprodukt definiert durch
$\langle \alpha_1 \otimes \beta_1, \alpha_2 \otimes \beta_2 \rangle_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ (bilinear fortgesetzt).

Satz 11. *(Geissinger-Bialgebra)*
Die Algebra $(\mathcal{C}, \bullet)$ ist freie assoziative, kommutative Algebra erzeugt von den $ch_n, n \in \mathbb{N}$ (mit Eins $1 := ch_\emptyset$), d.h. sie ist Polynomalgebra $\mathbb{C}[ch_n : n \in \mathbb{N}]$.
Die Abbildung $\downarrow: \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ ist ein Algebrahomomorphismus (wobei $(\alpha_1 \otimes \beta_1) \bullet (\alpha_2 \otimes \beta_2) := \alpha_1 \bullet \alpha_2 \otimes \beta_1 \bullet \beta_2$) und

$$\langle \alpha \bullet \beta, \gamma \rangle_{\mathcal{C}} = \langle \alpha \otimes \beta, \gamma \downarrow \rangle_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$$

(man sagt, $\downarrow$ ist die zu $\bullet$ duale Komultiplikation, C ist selbstduale Bialgebra).

Beweis-Skizze:

Wie in Vorüberlegungen beschreibt man die Algebrastruktur.

Dann rechnet man nach, dass $ch_a \downarrow \ \bullet \ ch_b \downarrow = (ch_a \bullet ch_b) \downarrow$. Für $a, b \in \mathbb{N}_0$ also $[(ch_a \otimes 1 + 1 \otimes ch_a) \bullet (ch_b \otimes 1 + 1 \otimes ch_b) =]$

$ch_{a.b} \otimes 1 + 1 \otimes ch_{a.b} + ch_a \otimes ch_b + ch_b \otimes ch_a = \sum_{k+l=n} (ch_{a.b}) \downarrow_{S_{k.l}}$.

Hierbei ist $(ch_{a.b}) \downarrow_{S_{k.l}} = ab \cdot \delta_{K_{a.b}} | S_{k.l}$
$= 0$, falls nicht $(k, l) \in \{(n, 0), (0, n), (a, b), (b, a)\}$;
und gleich $ab \cdot \delta_{K_a} \delta_{K_b} | S_{a.b} = ch_k \otimes ch_l$ falls $(k, l) = (a, b)$ oder (b, a).

Weiterhin ist die Gleichung

$$\langle \alpha \bullet \beta, \gamma \rangle_{\mathcal{C}} = \langle \alpha \otimes \beta, \gamma \downarrow \rangle_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$$

gerade eine Umformulierung des Reziprozitätsgesetzes. □

Bemerkung:

Eine VR-Basis von $\mathcal{C}$ ist gegeben durch die irreduziblen Charaktere aller S_n, Dimension von $Cl(S_n)$ ist die Anzahl der Konjugationsklassen, also Partitionen als Indexmenge: $\zeta^\nu,\ {}_{\nu\vdash|\nu|}$.

Es stellt sich die Frage nach Strukturkonstanten (bzgl. dieser Basis), den sogenannten Littlewood-Richardson-Koeffizienten $c^\nu_{\lambda,\mu} \in \mathbb{C}$

geg. durch $\zeta^\lambda \bullet \zeta^\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} \cdot \zeta^\nu$.

Nächstes Ziel: Konstruktion der $\zeta^\nu,\ {}_{\nu\vdash|\nu|}$ bzw. der zugehörigen Darstellungen.

Sei, für jedes $n \in \mathbb{N}$, $\zeta^{(n)} = 1_{S_n}$ der (irreduzible) Charakter der trivialen Darstellung von S_n.

Ist λ Partition (oder Zerlegung), so sei $\xi^\lambda = \zeta^{(\lambda_1)} \bullet \ldots \bullet \zeta^{(\lambda_l)}$.

Es gilt:

ξ^λ ist Charakter des S_n-Moduls M^λ ($= \mathbb{C}[S_n\{\mathbf{t}\}]$, λ-Tabloid $\{t\}$) d.h. der Restklassendarstellung von S_n bzgl. S_λ; er heißt **Young Charakter** zu λ.

Denn:

Für $\lambda = (n)$ ist $\xi^\lambda = 1_{S_n}$. Zu zeigen (mit Induktion über l), dass $1_{S_\lambda} \uparrow^{S_n} = \xi^\lambda$.

$$1_{S_\lambda} \uparrow^{S_n} = \left(1_{S_{\lambda_1 \ldots \lambda_{l-1}}} \otimes 1_{S_{\lambda_l}}\right) \uparrow^{S_n}$$
$$= \left(\left(1_{S_{\lambda_1 \ldots \lambda_{l-1}}} \otimes 1_{S_{\lambda_l}}\right) \uparrow^{S_{(\lambda_1+\ldots+\lambda_{l-1})\cdot\lambda_l}}\right) \uparrow^{S_n}$$
$$= \left(1_{S_{\lambda_1 \ldots \lambda_{l-1}}} \uparrow^{S_{(\lambda_1+\ldots+\lambda_{l-1})}} \otimes \zeta^{(\lambda_l)}\right) \uparrow^{S_n} = 1_{S_{\lambda_1 \ldots \lambda_{l-1}}} \uparrow^{S_{(\lambda_1+\ldots+\lambda_{l-1})}} \bullet \zeta^{(\lambda_l)}.$$

Bemerkung:

Während $M^{(n)}$ (triviale Darstellung) irreduzibel, ist $M^{(1^n)}$ reguläre Darstellung (enthält alle irreduziblen in direkter Summenzerlegung).

Sei $\lambda \vdash n$. Schreibt man $\xi^\lambda = \sum_\nu k_{\nu\lambda}\zeta^\nu$, so heißt die Matrix $(k_{\nu\lambda})_{k,\nu\vdash n}$ **Kostka-Matrix**.

Wir werden zeigen:

Bezüglich geeigneter Anordnung der Partitionen ist $(k_{\nu\lambda})_{k,\nu\vdash n}$ obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen (und damit lassen sich die irreduziblen Darstellungen leicht berechnen).

6 Specht-Moduln

Sei t λ-Young-Tableau, $\lambda \vdash n$.

In S_n hat man den **Zeilenstabilisator** H_t und **Spaltenstabilisator** V_t als Young-Untergruppen.

[Wh: Für $t = \binom{412}{35}$,
$H_t = S(\{1,2,4\}) \times S(\{3,5\})$, Tabloid $\{t\} = \frac{\overline{412}}{\underline{35}} = H_t \cdot \binom{412}{35}$.]

Es gilt: Für alle $\pi \in S_n$:
$H_{\pi t} = \pi H_t \pi^{-1}$, $V_{\pi t} = \pi V_t \pi^{-1}$,
Denn:
$\sigma \in H_{\pi t} \iff \sigma \cdot \{\pi t\} = \{\pi t\}$
$\iff \pi^{-1}\sigma\pi\{t\} = \{t\} \iff \pi^{-1}\sigma\pi \in H_t \iff \sigma \in \pi H_t \pi^{-1}$

Definition. *Sei $X \subseteq S_n$. Man definiert folgende Elemente von $\mathbb{C}[S_n]$:*
$X^+ := \sum_{\pi\in X} \pi$ *und*
$X^- := \sum_{\pi\in X} sgn(\pi)\pi$.
Speziell, für t λ-Young-Tableau, $\lambda \vdash n$,
$\kappa_t := V_t^- = \sum_{\pi\in V_t} sgn(\pi)\pi$ *lässt sich als Produkt* $\kappa_{V_1}\kappa_{V_2} \cdot ... \cdot \kappa_{V_k}$ *schreiben, wobei $V_1, ..., V_k$ die Spalten von t seien,* $\kappa_{V_i} = \sum_{\pi\in S(V_i)} sgn(\pi)\pi$.

Bsp: für $t = \binom{412}{35}$,
$\kappa_t = (\mathrm{id} - (3,4))(\mathrm{id} - (1,5))$.

Elemente der Form $e_t = \kappa_t\{\mathbf{t}\}$ in M^λ (= $\mathbb{C}[S_n\{\mathbf{t}\}]$, λ-Tabloid $\{t\}$) heißen λ-**Polytabloide** *(e_t hängt von t – nicht nur vom Tabloid – ab).*

Der von den Polytabloiden e_t, t der Gestalt λ, aufgespannte Untermodul von M^λ heißt **Specht-Modul**, *bez. S^λ.*

Bsp (obiges t): $e_t = \frac{\overline{412}}{\underline{35}} - \frac{\overline{312}}{\underline{45}} - \frac{\overline{452}}{\underline{31}} + \frac{\overline{352}}{\underline{41}}$

Es gilt: Für alle $\sigma \in S_n$: $e_{\sigma t} = \sigma e_t$.
Somit ist S^λ zyklischer S_n-Modul, erzeugt von beliebigen λ-Polytabloid.

Denn:
Nach Definition von $\kappa_t = V_t^-$ ist $\kappa_{\sigma t} = \sum_{\pi\in\sigma V_t \sigma^{-1}} \mathrm{sgn}(\pi)\pi = \sigma\kappa_t\sigma^{-1}$.
Nun:
$e_{\sigma t} = \kappa_{\sigma t}\sigma t = \sigma\kappa_t\sigma^{-1}\sigma t = \sigma e_t$.

Beispiel 12. *a)* $S^{(n)}$ *: triviale Darstellung (Untermodul von* $M^{(n)}$*, s.o.)*

b) Für $\lambda = (1^n)$ *sei* $t = (1...n)^t$ *(Spalte). Es ist* $S^{(1^n)} = \mathbb{C}[e_t]$ *sgn-Darstellung, denn:* $t :=$ *Spalte* $(1, ..., n)$*. Dann ist* $\kappa_t = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\sigma$*, und* e_t *ist das Polytabloid* $\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\sigma\{t\}$*. (Spalten)*

Nun ist $\pi e_t = e_{\pi t} = sgn(\pi) e_t$

(denn $e_{\pi t} = \sum_{\tau = \pi\sigma \in S_n} sgn(\pi^{-1}\tau)\tau\{t\} = sgn(\pi) \sum_{\tau \in S_n} sgn(\tau)\tau\{t\}$*).*

Damit ist $S^{(1^n)} = \mathbb{C}[e_t]$ *mit* $\pi e_t = sgn(\pi)e_t$*.*

Übung:

Für $\lambda = (n-1).1$ sei $t = \binom{i....}{k}$.

Es ist $e_t = \mathbf{k} - \mathbf{i}$, wo $\mathbf{k} :=$ Tabloid mit k in zweiter Zeile.

Der von den e_t erzeugte Vektorraum $\{c_1\mathbf{1} + ... + c_n\mathbf{n} : \sum c_i = 0\}$ ist $(n-1)$-dimensional und hat Basis $\{\mathbf{2} - \mathbf{1}, \mathbf{3} - \mathbf{1}, ..., \mathbf{n} - \mathbf{1}\}$.

Man erhält irreduziblen S_n-Modul mit Charakter $\chi^\perp$ [Anzahl Fixpunkte -1], wo $\chi^{def} = \chi^{triv} + \chi^\perp$.

Definition.

Seien $\lambda = \lambda_1. \; ... \; .\lambda_l$ *und* $\mu = \mu_1. \; ... \; .\mu_m$ *Partitionen (oder allgemeiner Komposition) von* n*.*

Sei $\lambda \trianglerighteq \mu :\iff \quad \lambda_1 + ... + \lambda_i \geq \mu_1 + .. + \mu_i$ *für alle* i*.*

(wobei λ_i, μ_i *Null gesetzt werden für große* i*).*

Es gilt:

$\trianglerighteq$ definiert eine partielle Ordnung auf den Partitionen von S_n, die sogenannte **Dominanz-Ordnung**. Die lexikographische Ordnung $>_{lex}$ (mit $\lambda >_{lex} \mu :\iff \lambda_i > \mu_i$ für ersten verschiedenen Buchstaben von links) ist eine Verfeinerung von $\triangleright$:

Sind λ und μ vergleichbar bezüglich Dominanz-Ordnung, so ist

$\lambda >_{lex} \mu \iff \lambda \triangleright \mu$.

Denn:

Sei i der erste Index wo λ und μ verschieden sind, somit auch $\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j = \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j$. Die nächste Partialsumme ist dann für λ genau dann größer (als die für μ), wenn $\lambda_i > \mu_i$.

Bsp: Für $n = 6$: $(6) \triangleright 5.1 \triangleright 4.2 \triangleright 4.1.1 >_{lex} 3.3 \triangleright 3.2.1 \triangleright 3.1.1.1 >_{lex} 2.2.2 \triangleright 2.2.1.1 \triangleright 2.1^4 \triangleright (1^6)$;

hierbei sind 4.1.1 und 3.3 nicht vergleichbar bzgl. $\triangleright$ (da $4 > 3$ aber $4 + 1 < 3 + 3$), aber $4.1.1 \triangleright 3.2.1$, ebenso 3.1.1.1 und 2.2.2 nicht vergleichbar.

Es gilt:

Sind t^λ, s^μ Young Tableaux der Gestalt $\lambda, \mu \vdash n$, und gilt für alle i, dass von den Einträge der i-ten Zeile von s^μ sich in t^λ niemals zwei in derselben Spalte befinden, so muss $\lambda \trianglerighteq \mu$ gelten.

[Übg: $t : 153/426$ und $s : 12/34/5/6$]

Denn:

Die Einträge von t^λ lassen sich in den Spalten so umsortieren, dass sich die Einträge der ersten i Zeilen von s^μ in den ersten i Zeilen von t^λ befinden. Es folgt dass $\lambda_1 + ... + \lambda_i$ größer oder gleich der Anzahl der Einträge in den ersten i Zeilen von t^λ, die sich auch in s^μ befinden, sein muss (d.h. als $\mu_1 + ... + \mu_i$). $\square$

Lemma 2. *Sei $\langle , \rangle$ das Skalarprodukt auf M^λ mit $\langle \{\mathbf{t}\}, \{\mathbf{s}\} \rangle = \delta_{\{\mathbf{t}\},\{\mathbf{s}\}}$. Sei $L \leq S_n$ eine Untergruppe. Dann gilt:*

(i) Für alle $u, v \in M^\lambda$ ist $\langle L^- u, v \rangle = \langle u, L^- v \rangle$.

(ii) Ist die Transposition $(b, c) \in L$, so ist $L^- = k(\mathrm{id} - (b, c))$ für ein $k \in \mathbb{C}[S_n]$.

(iii) Ist $(b, c) \in L$, und s ein Tableau, das b und c in derselben Zeile enthält, so ist $L^- \{s\} = 0$.

(iv) Sind t^λ, s^μ Young-Tableaux der Gestalt $\lambda, \mu \vdash n$, und gilt $\kappa_t \{s\} \neq 0$, so gilt $\lambda \trianglerighteq \mu$. Ist speziell $\lambda = \mu$, so ist $\kappa_t \{s\} = \pm e_t$.

(v) Ist $u \in M^\mu$ und t ein Young Tableau der Gestalt μ, so ist $\kappa_t u$ ein Vielfaches von e_t.

Beweis:

1) $\langle L^- u, v \rangle = \sum_{\pi \in L} \langle (\mathrm{sgn}\pi) \pi u, v \rangle = \sum_{\pi \in L} \langle u, (\mathrm{sgn}\pi) \pi^{-1} v \rangle = \langle u, L^- v \rangle$,
indem man π durch π^{-1} ersetzt.

2) Sei $k_1, ..., k_l$ Transversal in L für die Untergruppe $\{\mathrm{id}, (b, c)\}$ von L. Dann ergibt sich $k = \sum_i (\mathrm{id} + (\mathrm{sgn} k_i) k_i)$.

3) Da $(b, c)\{s\} = \{s\}$, gilt $L^- \{s\} = k(\mathrm{id} - (b, c))\{s\} = k\{0\} = 0$.

4) Nach 3) müssen je zwei Einträge b, c einer Zeile von s^μ in t^λ in verschiedenen Spalten auftreten, wenn $V_t^- \{s\} \neq 0$.

Ist $\lambda = \mu$, dann existiert (s.o.) ein $\pi \in V_t$ mit $\{s\} = \pi\{t\}$. Nun ist $\kappa_t \{s\} = (V_t^- \pi)\{t\} = (\mathrm{sgn}\pi) \kappa_t \{t\}$ (vgl. Rechnung in Bsp. 12b).

5) Sei $u = \sum_i c_i \{s_i\} \in M^\mu$, s_i sind μ-Tableaux. Nach 4) ist $\kappa_t u = \sum_i \pm c_i e_t$. $\square$

Satz 12. *(Untermodul-Theorem von James)*

Sei U ein S_n-invarianter Unterraum von M^ν. Dann gilt

$$U \supseteq S^\nu \text{ oder } U \subseteq S^{\nu \perp}$$

Insbesondere sind die S^ν irreduzibel (wenn der Grundkörper $\mathbb{C}$ ist).

Beweis:

Mit Aussage (v) des Lemmas gilt für jedes u im S_n-invarianten Unterraum U und jedes ν-Tableau t, dass $\underbrace{\kappa_t u}_{\in U} = ae_t$ für ein $a \in \mathbb{C}$.

Fall 1: Es gebe u und t mit $a \neq 0$. Somit ist dann $e_t \in U$ und S^ν ist (als zyklischer Modul) enthalten in U.

Fall 2: Es gelte immer $\kappa_t u = 0$. Mit Aussage (i) des Lemmas ist $\langle u, e_t \rangle = \langle u, V_t^-\{t\} \rangle = \langle \kappa_t u, \{t\} \rangle = 0$. Deshalb folgt $U \subseteq S^{\nu\perp}$, da der Vektorraum S^ν erzeugt wird von den Polytabloiden e_t.

Es ist $S^\nu \cap S^{\nu\perp} = 0$ [gilt nicht für Charakteristik p], also folgt Irreduzibilität der S^ν. □

Satz 13. *Die $S^\nu, \nu \vdash n$ bilden eine vollständige Liste der irreduziblen S_n-Moduln (über $\mathbb{C}$).*

Weiterhin gilt für die Einträge $k_{\nu\lambda}$ der Kostka-Matrix:

$$k_{\nu\lambda} \neq 0 \Longrightarrow \nu \trianglerighteq \lambda$$

und $k_{\nu\nu} = 1$.

Beweis-Skizze:

1) Sei $0 \neq \theta \in \mathrm{Hom}(S^\nu, M^\lambda)$. Dann gilt $\nu \trianglerighteq \lambda$; und $\theta \in \mathbb{C}\,\mathrm{id}$ für $\nu = \lambda$.

Denn: Es existiert ein Basisvektor e_t von S^ν mit $0 \neq \theta(e_t) = \kappa_t \theta_1(\{t\}) = \kappa_t(\sum_i c_i\{s_i\})$ mit λ-Tableaux s_i. Somit $\nu \trianglerighteq \lambda$ nach Aussage (iv) des Lemmas. Für $\nu = \lambda$ benutzt man Aussage (v) des Lemmas [$\theta(e_t) = ce_t$, und dann auch $e_{\pi t} \mapsto ce_{\pi t}$].

2) Wir zeigen: die S_n-Moduln $S^\nu, \nu \vdash n$ sind paarweise nicht äquivalent. (Dann hat man die richtige Anzahl nicht äquivalenter irreduzibler!)

Man erhält von 0 verschiedene Homomorphismen $\theta_1 : S^\nu \cong S^\mu \subseteq M^\mu$ und $\theta_2 : S^\mu \to M^\nu$. Somit $\nu \trianglerighteq \mu$ nach 1), ebenso mit θ_2 folgt $\mu \trianglerighteq \nu$ also $\nu = \mu$.

3) Kommt S^ν in M^λ mit Multiplizität $\neq 0$ vor, so folgt mit 1), dass $\nu \trianglerighteq \lambda$.

Weiterhin zeigt man:

Die Multiplizität von S^ν in M^ν ist gleich $\dim \mathrm{Hom}(S^\nu, M^\nu) = 1$.

□

Anmerkung:

Nimmt man nur die Polytabloide e_t mit t Standard-Young-Tableaux der Gestalt ν, so kann man zeigen, dass diese eine Basis von S^ν bilden.

(Insbesondere: Anzahl f_ν aller solcher Standard-Young-Tableaux gibt dann die Dimension von S^ν an.)

Übung: $n = 4$