Lineare Darstellungen von Symmetrischen Gruppen

150 232 (Holtkamp) 2st., Mi 12.00-14.00, NA 2/24

Beispiel 1. *Freies Monoid über Alphabet X*

Beispiel 2. $S_1, S_2, S_3, ...$

Satz 1. *(Bijektion zw. Partitionen von n und Konjugationsklassen von S_n)*

Satz 2. *($k_\lambda = ...$)*

Beispiel 3. *Triviale Darstellung, Sgn-Darstellung, Standard-Darstellung von S_n*

Beispiel 4. *Linksreguläre Darstellung ...*

Beispiel 5. $\mathbb{C}[\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \mathbf{n}]$

Beispiel 6. $\mathbb{C}[\underline{3}] = \mathbb{C}[\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}] \oplus \mathbb{C}[\mathbf{2} - \mathbf{1}, \mathbf{3} - \mathbf{1}]$ *als S_3-Modul.*

Satz 3. *(Maschke)*

Beispiel 7. $\mathbb{C}[\mathcal{H}], \mathcal{H} := \{H, (1,2)H, (1,3)H\},\ H = S(\{2,3\}) \leq S_3$

Lemma 1. *(Schur)*

Beispiel 8. M^λ

Satz 4. $\mathbb{C}[S_n\{t^\lambda\}]$ *isomorph zur Restklassendarstellung von S_n bzgl. S_λ.*

4

Beispiel 9. *Fixpunkte zählen...*

Satz 5. *(Charakter-Gleichungen erster Art [die Zeilen]).*

Beispiel 10. *Charaktertafel von S_3*

Satz 6. *Multiplizitäten in $\mathbb{C}[G]$.*

Wh:

S_3	K_1	K_2	K_3
χ^{triv}	1	1	1
$\chi^{\perp}$	2	0	-1
χ^{sgn}	1	-1	1

Charakter-Gleichungen erster Art: $\sum_K \frac{|K|}{|G|}\chi(K)\overline{\psi(K)} = \delta_{\chi,\psi}$

(Kor.Satz 6)
Die irreduziblen Charaktere einer Gruppe G bilden eine ON-Basis für $Cl(G)$.
Dimension für $G = S_n$: Anzahl der Partitionen $\lambda \vdash n$.

Erste oben bestimmte Basis: δ_{K_λ}, $\lambda \vdash n$. (Hierbei sei für $\lambda \vdash n$, und sei K_λ die zugehörige Konjugationsklasse in S_n, $n \in \mathbb{N}_0$.)
Diese kann auch orthnormalisiert werden.
Genauer gilt:
Man definiert $ch_\lambda := |Z_\lambda|\ \delta_{K_\lambda} = \frac{n!}{|K_\lambda|}\delta_{K_\lambda}$. Dann ist für alle $\alpha \in Cl(S_n)$

$$\langle \alpha, ch_\lambda \rangle' = \langle \alpha, ch_\lambda \rangle = \alpha(K_\lambda).$$

Denn:
$\langle \alpha, ch_\lambda \rangle' = \frac{1}{|S_n|}\sum_{\pi \in S_n} \alpha(\pi) ch_\lambda(\pi^{-1}) = \frac{1}{n!}|K_\lambda|\ \alpha(K_\lambda)\frac{n!}{|K_\lambda|}$.

Satz 7. *(Charakter-Gleichungen der zweiten Art: die Spalten)*
Seien K, L Konjugationsklassen von G. Dann gilt

$$\sum_{\chi irred. Charakter} \chi_K \bar{\chi}_L = \frac{|G|}{|K|}\delta_{K,L}.$$

Beweis:
Nach 1.Art: Die modifizierte Charaktertafel $U = \left(\sqrt{\frac{|K|}{|G|}}\chi_K\right)$ hat orthonormale Zeilen (bzgl. des komplexen Skalarprodukts $\sum v_i \bar{w}_i$). Da sie quadratisch ist, ist sie unitär, hat also auch orthonormale Spalten. □

Beweis (Satz 6):
Sei $V^{(1)}, ..., V^{(l)}$ Liste aller irreduziblen G-Moduln, $V^{(i)}$ mit Charakter $\chi^{(i)}$.
Sei $m_i \geq 0$ die zugehörige Multiplizität in $\mathbb{C}[G]$. Sei $\chi = \chi^{reg}$.
1) [z.z. $m_i = \dim V^{(i)}$] Es ist
$m_i = \langle \chi, \chi^{(i)} \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\chi^{(i)}(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\chi(1_G)\chi^{(i)}(1_G) = \frac{|G|}{|G|}\dim V^{(i)}$.
Da $\dim \mathbb{C}[G] = |G|$, folgt 2) $[\sum_i(\dim V^{(i)})^2 = |G|]$
noch z.z. 3) [Die Anzahl l ist gleich der Anzahl k der Konjugationsklassen.]

Anwendung des Lemmas von Schur (s.o.): $Z_{End(V)}$ ist isomorph zur Algebra der $l \times l$-Diagonalmatrizen. Jetzt ist $V = \mathbb{C}[G]$.

Nun ist $\dim Z_{End(\mathbb{C}[G])} = \dim Z_{\mathbb{C}[G]}$, denn die Abbildung

$$\phi : \mathbb{C}[G] \to End(\mathbb{C}[G]), v \mapsto \phi_v, \text{ wobei } \phi_v(w) = wv$$

ist Vektorraum-Isomorphismus (sogar Algebra-Anti-Isomorphismus). (Ist $\phi_v = \mathrm{id}$, so ist $1_G = \phi_v(1_G) = v$, also Kern trivial; ist $\theta \in End(\mathbb{C}[G])$, so ist $\theta = \phi_v$ für $v = \theta(1_G)$, da $\theta(g) = g\theta(1_G) = \phi_v(g)$ für jedes Basiselement g, also folgt auch Surjektivität).

Bleibt z.z.: $\dim Z_{\mathbb{C}[G]} = k$, wenn $K_1, ..., K_k$ die Konjugationsklassen von G.

Sei $z = c_1g_1 + ... + c_ng_n \in Z_{\mathbb{C}[G]}$; also für alle $h \in G$ gilt $c_1g_1 + ... + c_ng_n = c_1(hg_1h^{-1}) + ... + c_n(hg_nh^{-1})$.

Alle Elemente g der Konjugationsklasse von g_1 sind hg_1h^{-1} für ein h, und der Koeffizient vor jedem g ist c_1. D.h. $Z_{\mathbb{C}[G]} = \{\sum_{i=1}^k d_iz_i : d_i \in \mathbb{C}\}$, wobei $z_i := \sum_{g\in K_i} g$. Weiterhin sind die z_i linear unabhängig, da die Konjugationsklassen paarweise disjunkt sind. Also bilden sie eine Basis. □

Satz 8. *Seien G und H Gruppen.*

Sind d_G, d_H irreduzible Darstellungen von G bzw. H, mit Charakteren χ, ψ, so ist $d_G \otimes d_H$ irreduzible Darstellung von $G \times H$ mit Charakter $\chi \otimes \psi$ gegeben durch $(\chi \otimes \psi)(g, h) = \chi(g)\psi(h)$.

Wird durch $d_G^{(i)}$, $d_H^{(j)}$ eine vollständige Liste aller (paarweise nicht äquivalenten) irreduziblen Darstellungen für G bzw. H gegeben, so bilden die $d_G^{(i)} \otimes d_H^{(j)}$ eine vollständige Liste aller irreduziblen $G \times H$-Moduln.

Definition. *Man definiert, für $\chi \in Cl(G)$ und $\psi \in Cl(H)$, $\chi\otimes\psi \in Cl(G\times H)$ durch $(\chi \otimes \psi)(g, h) = \chi(g)\psi(h)$ und identifiziert $Cl(G \times H)$ mit $Cl(G) \otimes Cl(H)$.*

Beweis (Satz):

1) Spur $A \otimes B = \sum_i a_{i,i}\mathrm{Spur}(B) = \mathrm{Spur}A\mathrm{Spur}B$.

Deshalb ist $(\chi \otimes \psi)(g, h) = \mathrm{Spur}d_G(g)\mathrm{Spur}d_H(h) = \chi(g)\psi(h)$.

Nun ist $\langle\chi \otimes \psi, \chi \otimes \psi\rangle = \frac{1}{|G\times H|} \sum_{(g,h)\in G\times H}(\chi \otimes \psi)(g, h)(\chi \otimes \psi)((g^{-1}, h^{-1})) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi(g)\psi(g^{-1}) \cdot \frac{1}{|H|} \sum_{h\in H} \chi(h)\psi(h^{-1}) = \langle\chi, \chi\rangle\langle\psi, \psi\rangle = 1$. (also irreduzibel)

2) Analog zeigt man $\langle\chi^{(i)} \otimes \psi^{(j)}, \chi^{(k)} \otimes \psi^{(l)}\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Deshalb sind die zugehörigen Darstellungen paarweise nichtäquivalent. Die Liste ist vollständig, da die Anzahl der Konjugationsklassen von $G \times H$ gerade das Produkt der Anzahlen für G,H ist.

□

5 Restriktion und Induktion

Definition.

Sei $H \leq G$ und d eine Matrixdarstellung von G. Dann ist die Restriktion von d auf H, in Zeichen $d \downarrow_H^G$ oder $d \downarrow_H$, gegeben durch

$$d \downarrow_H (g) = d(h).$$

Klar: ist Darstellung von H, Charakter $\chi|H$.

(Achtung: Beschränkung von irreduziblen nicht notwendigerweise irreduzibel!)

Umgekehrt kann man nicht einfach eine Darstellung auf H zu einer auf G durch 0 außerhalb H fortsetzen (singuläre Matrizen nicht erlaubt). Aber:

Definition. *Sei $H \leq G$. Sei $t_1, ..., t_l$ Transversal für die Linksrestklassen bzgl. H in G.*

Ist d Darstellung von H, so sei $d \uparrow^G = d \uparrow_H^G$ gegeben durch

$$d \uparrow^G (g) = \begin{pmatrix} d(t_1^{-1}gt_1) & d(t_1^{-1}gt_2) & ... \\ d(t_2^{-1}gt_1) & ... & \\ ... & & \end{pmatrix}$$

mit $d(g)$ Nullmatrix falls $g \notin H$.

Man erhält die sog. **induzierte Darstellung** *(s.u.)*

Beispiel 11. *Sei $G = S_3$, $H = \{\mathrm{id}, (2,3)\}$. Dann ist $\mathcal{H} := \{1 \cdot H, (1,2)H, (1,3)H\}$ (gegeben durch) ein Transversal.*

Sei $d_H = 1$ die triviale Darstellung von H.

Was ist $d_G = 1 \uparrow^G$, z.B. $1 \uparrow^G ((1,2))$?

Erste Zeile: $\begin{pmatrix} d(1^{-1}g1) & d(1^{-1}g(1,2)) & d(1^{-1}g(1,3)) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} d((1,2) \notin H) & d(\mathrm{id})) & d((1,3,2) \notin H) \end{pmatrix}$

Man erhält:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *[wieder Restklassendarstellung bzgl. $S_{2.1} = H$].*

Es gilt:

Sei $H \leq G$ und $\mathcal{H} = t_1, ..., t_l$ Transversal für die Linksrestklassen bzgl. H in G.

Dann ist die durch den Restklassenmodul $\mathbb{C}[\mathcal{H}]$ gegebene Matrixdarstellung identisch mit der Darstellung $1 \uparrow^G$.

denn:

Seien $x_{ij}(g) \in \{0,1\}$ die Einträge der Matrixdarstellung $1 \uparrow^G$, und $z_{ij}(g) \in \{0,1\}$ die Einträge der Restklassendarstellung.

Äquivalent ist $x_{ij}(g) = 1$ zu $t_i^{-1}gt_j \in H$ zu $g \cdot t_jH = t_iH$ zu $z_{ij}(g) = 1$ (die $\mathbb{C}[\mathcal{H}]$-Modul-Operation bildet gerade t_jH auf $g \cdot t_jH$ ab).

Satz 9. *Die (in der Definition gegebene) induzierte Darstellung ist eine Darstellung von G. Sie hängt bis auf Äquivalenz nicht von der Wahl des Transversals ab.*

Beweis:

1) Jedes $d\uparrow^G(g)$ ist Blockpermutationsmatrix, d.h. dass jede Zeile und jede Spalte genau einen Block $d(t_i^{-1}gt_j) \neq 0$ trifft.

Denn: Für die erste Spalte (Rest analaog):

z.z. von den Elementen $t_1^{-1}gt_1, t_2^{-1}gt_1, ..., t_l^{-1}gt_1$ ist genau ein Element von H.

Da $t_1, ..., t_l$ Transversal, ist $gt_1 \in t_iH$ für genau ein i, deshalb ist nur $t_i^{-1}gt_1 \in H$.

2) $d\uparrow^G(1_G)$ ist Einheitsmatrix (klar)

$d\uparrow^G(g)d\uparrow^G(h) = d\uparrow^G(gh)$, denn – Block (i,j) betrachtet:

$$\sum_k d(a_k)d(b_k) = d(c)$$

mit $a_k := t_i^{-1}gt_k, b_k := t_k^{-1}ht_j, c = t_i^{-1}ght_j (= a_kb_k$ für alle $k)$.

Fall $c \notin H$: für jedes k ist entweder a_k oder b_k nicht in H, somit beide Seiten 0.

Andernfalls: Sei m der (eindeutig bestimmte, s.o.) Index mit $a_m := t_i^{-1}gt_m$ Element von H.

Dann fogt $b_m = a_m^{-1}c$ und $\sum_k d(a_k)d(b_k) = d(a_m)d(b_m) = d(a_mb_m) = d(c)$.

3) Seien $\{t_1, ..., t_l\}$ und $\{s_1, ..., s_l\}$ zwei Transversale, $d\uparrow^G$ und $\widetilde{d\uparrow^G}$ die induzierten Darstellungen, mit Charakteren $\chi\uparrow^G, \widetilde{\chi\uparrow^G}$.

noch z.z.: $\chi\uparrow^G = \widetilde{\psi\uparrow^G}$.

Hierbei ist $\chi\uparrow^G(g) = \sum_i \text{Spur } d(t_i^{-1}gt_i), \widetilde{\psi\uparrow^G}(g) = \sum_i \text{Spur } d(s_i^{-1}gs_i)$.

oBdA (Umordnung der Elemente) sei $t_iH = s_iH$ für alle i, d.h. $t_i = s_ih_i$ für gewisse $h_i \in H$. Dann ist $t_i^{-1}gt_i = h_i^{-1}(s_i^{-1}gs_i)h_i \in H$ genau dann wenn $s_i^{-1}gs_i \in H$, also sind Summanden jeweils für dieselben i von 0 verschieden, übrig bleibt jeweils $\sum \chi(h_i^{-1}(s_i^{-1}gs_i)h_i)$ bzw. $\sum \chi(s_i^{-1}gs_i)$, χ der Charakter von d.

Da der Charakter χ von d Klassenfunktion ist, folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung.

Andere Definitionsmöglichkeit:

Für H-Linksmodul V, $H \leq G$, betrachtet man den G-Modul $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} V$ (wobei $\mathbb{C}[H]$ auf V von links, auf $\mathbb{C}[G]$ von rechts operiert). Ist $t_1, ..., t_l$ Transversal, so ist $t_i \otimes v_k (1 \leq i \leq l, 1 \leq k \leq \dim V)$ Basis dieses Vektorraums und $g \in G$ operiert durch $g \cdot (t_j \otimes v_k) = t_i \otimes hv_k$, wenn $gt_j = t_ih$.

(Wir haben auch gezeigt:)
Zusatz zu Satz 9
$\chi\uparrow^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G, x^{-1}gx\in H}\chi(x^{-1}gx)$.

Denn: im Beweis oben
$\chi\uparrow^G(g) = \sum_i \mathrm{Spur}\, d(s_i^{-1}gs_i) = \sum_{s_i\in\mathcal{H}}\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\mathrm{Spur}\, d(h^{-1}s_i^{-1}gs_ih)$ und dies ist gleich $\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G, x^{-1}gx\in H}\chi(x^{-1}gx)$ [denn h durchläuft H und s_i das Transversal, also äquivalent $x = s_ih$ durchläuft G].

Man definiert allgemein für Funktionen $\chi : H\to\mathbb{C}$, $H\leq G$, die induzierte Funktion $\chi\uparrow^G$ auf G durch diese Formel.

Satz 10. *(Reziprozitätsgesetz von Frobenius)*
Sei $H\leq G$ und seien ψ,χ Charaktere von Darstellungen von H bzw. G. Dann gilt:

$$\langle\psi\uparrow^G,\chi\rangle_G = \langle\psi,\chi\downarrow_H\rangle_H$$

(Gilt auch allgemein für Klassenfunktionen bzgl. Bilinearform $\langle\rangle'$).

Beweis:
wegen Zusatz oben bleibt z.z.: $[\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\big(\psi\uparrow^G(g)\big)\chi(g^{-1}) =]$
$\frac{1}{|G||H|}\sum_{x\in G, g\in G, x^{-1}gx\in H}\psi(x^{-1}gx)\chi(g^{-1}) = \frac{1}{|H|}\sum_{y\in H}\psi(y)\chi(y^{-1})$
L.S. mit $y = x^{-1}gx$: $\frac{1}{|G||H|}\sum_{x\in G}\sum_{y\in H}\psi(y)\chi(xy^{-1}x^{-1})$ gleich rechte Seite, da:
$\chi(xy^{-1}x^{-1}) = \chi(y^{-1})$, und somit tritt für jedes $x\in G$ der gleiche Summand auf. □

Definition. *Sei $\mathcal{C} := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} Cl(S_n)$ und sei, für $\chi\in Cl(S_k)$ und $\psi\in Cl(S_l)$,*
$\chi\bullet\psi := (\chi\otimes\psi)\uparrow^{S_{k+l}}\in Cl(S_{k+l})$, wobei
$\chi\otimes\psi$ Klassenfunktion auf der Young-Untergruppe $S_{k.l}$ von $S_n := S_{k+l}$ (s.o.).
Die Verknüpfung $\bullet$ heißt äußeres Produkt auf $\mathcal{C}$.

Für $\lambda\models n$ (Zerlegung von n) definiert man
$ch_\lambda := ch_{\tilde\lambda}(= (1^{m_1}m_1!)\cdot ...\cdot(n^{m_n}m_n!)\delta\kappa_{\tilde\lambda})$, wenn $\tilde\lambda$ die eindeutig bestimmte Partition ist, die durch Umordnung der λ_i erreicht werden kann.

Es gilt:
Dann ist $ch_\lambda\bullet ch_\nu = ch_{\lambda.\,\nu}$ (mit $\lambda.\ \nu\models n := k+l$, wenn $k := |\lambda|, l := |\nu|$).

Denn, bzgl. der Basis ch_μ, $\mu \vdash n$, von $Cl(S_n)$ (s.o.):

$$\langle ch_{\lambda.\ \nu}, ch_\mu\rangle_{S_n} = ch_{\lambda.\ \nu}(K_\mu) = \begin{cases} |Z_\mu| & \text{für } \mu = \widetilde{\lambda.\ \nu}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\langle ch_\lambda \bullet ch_\nu, ch_\mu\rangle_{S_n} = \langle (ch_\lambda \otimes ch_\nu)\uparrow^{S_n}, ch_\mu\rangle_{S_n}$
Mit Frobenius-Reziprozität und Satz 8 (über $\chi \otimes \psi$) folgt
$\langle ch_\lambda \bullet ch_\nu, ch_\mu\rangle_{S_n} = \frac{1}{|S_{k.\ l}|}\sum_{(\pi,\sigma)\in S_{k.\ l}} ch_\lambda(\pi) ch_\nu(\sigma)\cdot ch_\mu|_{S_{k.\ l}}(\pi,\sigma)$.

Die $S_{k.\ l}$-Konjugationsklasse der (π,σ) mit Zykeltypen λ, ν ist enthalten in der Konjugationsklasse K_μ, $\mu = \widetilde{\lambda.\ \nu}$, von S_n, d.h. es muss (π vom Zykeltyp λ, σ vom Zykeltyp ν und) $\mu = \widetilde{\lambda.\ \nu}$ sein, damit der zugehörige Summand nicht verschwindet.

Für $\mu = \widetilde{\lambda.\ \nu}$ ergibt sich $\frac{1}{|S_{k.\ l}|}|K_\lambda||K_\nu|\underbrace{ch_\lambda(K_\lambda)}_{|Z_\lambda|=\frac{k!}{|K_\lambda|}} ch_\nu(K_\nu)\cdot\frac{|S_n|}{|K_\mu|} = |Z_\mu|$.

(und andernfalls ergibt sich 0. $\square$)