Lösungsvorschlag zum Übungsblatt 1

Aufgabe 1

$0.\overline{123} = \frac{123}{999}$; $1.0\overline{36} = 1 + \frac{1}{10} \cdot 0.\overline{36} = 1 + \frac{1}{10} \cdot \frac{36}{99} = \frac{990}{990} + \frac{36}{990} = \frac{1026}{990}$

Denn es gilt: $123 = 123.\overline{123} - 0.\overline{123} = 1000 \cdot 0.\overline{123} - 0.\overline{123} = 999 \cdot 0.\overline{123}$

und $36 = 36.\overline{36} - 0.\overline{36} = 100 \cdot 0.\overline{36} - 0.\overline{36} = 99 \cdot 0.\overline{36}$

Aufgabe 2

$G_1 : x - y = -1 \Leftrightarrow y = x + 1$; $G_2 : 3x + y = 9 \Leftrightarrow y = -3x + 9$; $G_3 : x + y = 2 \Leftrightarrow y = -x + 2$

$G_1 \cap G_2 : x + 1 = -3x + 9 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2\ (y = 3)$

$G_2 \cap G_3 : -3x + 9 = -x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}\ (y = -\frac{3}{2})$

$G_1 \cap G_3 : x + 1 = -x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ (y = \frac{3}{2})$

Also: $\mathbb{L}_1 = \{(x, x+1) | x \in \mathbb{R}\}, \mathbb{L}_2 = \{(x, -3x+9) | x \in \mathbb{R}\}, \mathbb{L}_3 = \{(x, -x+2) | x \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 = \varnothing$, $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{(2, 3)\}, \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 = \{(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2})\}, \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_3 = \{(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})\}$

Aufgabe 3

Wir sehen, dass die zweite Gleichung die Summe aus der ersten und der dritten ist. Wir können uns also auf das Gleichungssystem $2x_1 + x_2 = 1, \quad 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$ zurückziehen. Die beiden Gleichungen sind äquivalent zu $x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}, \quad -\frac{5}{2}x_2 + 2x_3 = -\frac{1}{2}$. Wählen wir etwa x_2 als freie Variable, so beschreiben wir die Lösungsmenge durch $\mathbb{L} = \{(\frac{1}{2}(1 - x_2), x_2, \frac{1}{4}(5x_2 - 1)) | x_2 \in \mathbb{R}\}$.

Ersetzen wir in der Aufgabenstellung in der dritten Gleichung die 0 auf der rechten Seite durch eine 1, erhalten wir durch Addition der ersten und dritten Gleichung $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$, im Widerspruch zur zweiten Gleichung, daher ist dann $\mathbb{L} = \varnothing$.

Wir hätten natürlich auch mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren so beginnen können:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & |1 & |1 \\ 3 & -1 & 2 & |1 & |1 \\ 1 & -2 & 2 & |0 & |1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & |\frac{1}{2} & |\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 2 & |1 & |1 \\ 1 & -2 & 2 & |0 & |1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & |\frac{1}{2} & |\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & 2 & |-\frac{1}{2} & |-\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & 2 & |-\frac{1}{2} & |\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Beim Betrachten der zweiten Lösungsspalte erkennen wir, dass sich die zweite und dritte Gleichung widersprechen, der andere Fall wurde bereits oben behandelt.

Aufgabe 4

Die Determinante der Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} a & a^2 \\ a^2 & a \end{pmatrix}$ ist $a \cdot a - a^2 \cdot a^2 = a^2(1 - a^2) = a^2(1 - a)(1 + a)$. Untersuchen wir zunächst den Fall einer verschwindenden Determinante. Die Fälle $a = 0$ und $a = 1$ liefern jeweils einen Widerspruch ($0 = \frac{1}{3}$ und $0 = \frac{2}{3}$ respektive $x_1 + x_2 = \frac{4}{3}$ und $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$) und daher eine leere Lösungsmenge. Für $a = -1$ erhalten wir (in beiden Zeilen) $x_1 - x_2 = \frac{2}{3}$ und damit $\mathbb{L} = \{(x_2 + \frac{2}{3}, x_2) | x_2 \in \mathbb{R}\}$. Für den Fall einer nicht verschwindenden Determinante wenden wir die Cramer'sche Regel an:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a + \frac{1}{3} & a^2 \\ \frac{2}{3} & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a^2 \\ a^2 & a \end{vmatrix}} = \frac{(a + \frac{1}{3})a - \frac{2}{3}a^2}{a^2 - a^4} = \frac{\frac{1}{3}a(a+1)}{a^2(1-a)(1+a)} = \frac{1}{3a(1-a)}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & a + \frac{1}{3} \\ a^2 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a^2 \\ a^2 & a \end{vmatrix}} = \frac{\frac{2}{3}a - a^3 - \frac{1}{3}a^2}{a^2(1-a)(1+a)} = \frac{3a - 2}{3a(a-1)}$$