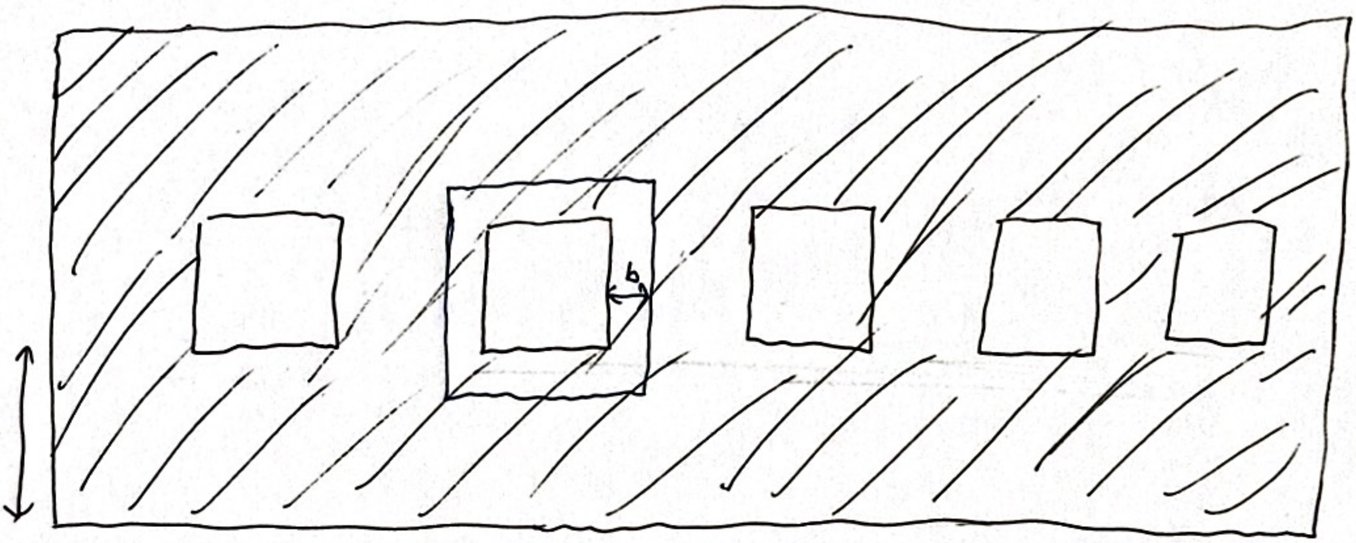
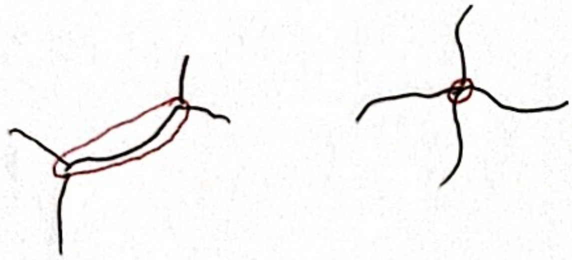
Kapitel 7: Aptenschränke

7.1 Definitionen:



Definition 7.1.1: Sei $A_{r,n}$ der Teilgraph von dem $(2n+1)r \times 3r$-Gitter, der entsteht, indem man für $1 \le a \le n$ alle Ecken (p,q) mit $(2a-1)r < p \le 2ar$ und $r < q \le 2r$ löscht. Für $a \le n$ ist $C_{a,b}$ der kürzeste Kreis in $A_{r,n}$ durch $((2a-1)r+1-b,\ r+1-b)$, $((2a-1)r+1-b,\ 2r+b)$, $(2ar+b,\ r+1-b)$ und $(2ar+b,\ 2r+b)$. Ein r,n-Aptenschrank in einem Graphen G ist ein kantenminimaler $A_{r,n}$-Minor A von G. Wir schreiben dann $C_{a,b}(A)$ für den eindeutigen Kreis in A, der

genau die Verzweigungsmengen für Ecken auf $C_{a,b}$ enthält. Der <u>äußere Kreis</u> von A ist der eindeutige Kreis in A, der genau die Verzweigungsmengen für Ecken auf dem äußeren Kreis des $(2n+1)r \times 3r$-Gitters enthält. Sei die Verzweigungsmenge für (p,q) $X_{p,q}(A)$. Für $d_{A_{r,n}}(p,q)=4$, sei $K_{p,q}(A)$ der maximaler Weg in $X_{p,q}(A)$, dessen Endecken Grad ≥ 3 in A haben.



A überlagert eine Masche M, falls es injektive Abbildungen ϕ von $[(2n+1)r]$ nach der Menge von senkrechten Wegen von M und ψ von $[3r]$ nach der Menge von waagerechten Wegen von M, sodass für $1 \leq p \leq (2n+1)r$ und $1 \leq q \leq 3r$: $K_{p,q}(A) \supseteq \phi(p) \cap \psi(q)$.

Definition 7.1.2: Für eine wirbelnde Wiedergabe $\rho = (\Gamma, \sigma, \pi)$ einer ~~Graph~~ Gesellschaft (G, Ω) und einen Kreis C in G, der in keine Zelle von Γ enthalten ist, legen wir einen Kreis $D(C,\rho)$ in Δ fest, dessen Schnitt mit $\bigcup \Gamma \cup \partial\Delta$ genau $\pi^{-1}(V(C))$ ist. Sei $\Delta(C,\rho)$ die Kreisscheibe mit Rand $D(C,\rho)$. Sei $G(C,\rho)$ der Graph $\bigcup_{\substack{c \in \Gamma \\ c \subseteq \Delta(C,\rho)}} G[c]$, und sei $\Omega(C,\rho) = V(C) \cap \mathrm{Im}(\pi)$, mit zyklischer Ordnung von der von $D(C,\rho)$ ~~da~~ induziert. Wir nennen $(G(C,\rho), \Omega(C,\rho))$ die <u>innere Gesellschaft</u> von C.

Definition 7.1.3: Sei G ein Graph. Ein <u>r, T-Ablegten</u> von G mit n Schubladen ist ein Tupel $\lambda = (X, \rho, A, (c_a)_{a \in n})$, sodass:

(A1) $X \subseteq V(G)$ mit $|X| \leq T$

(A2) ρ ist eine wirbelnde Wiedergabe von $(G \setminus X, \emptyset)$

(A3) A ist ein $\bar{r}\bar{n}$-Aktenschrank in $G \setminus X$.

(A4) $c_a \in \Gamma$ mit $c_a \subseteq \Delta(C_{a,1}(A), \rho)$

(A5) Jeder Wirbel ist ein c_a

(A6) Die $\Delta(C_{a,1}(A), \rho)$ sind disjunkt

Die <u>Schubladen</u> von λ sind die Zahlen $1, 2 \ldots n$.

Die Schublade a heißt:

→ flach, falls die Gesellschaft $(G(C_{a,10}, \rho), \Omega(C_{a,10}, \rho))$ flach ist

→ toroidal, falls sie nicht flach ist, aber $(G(C_{a,1}, \rho), \Omega(C_{a,1}, \rho))$ eine Wiedergabe in dem Torus mit einem Loch hat.

→ kreuzhaubal, falls sie nicht flach ist, aber $(G(C_{a,1}, \rho), \Omega(C_{a,1}, \rho))$ eine Wiedergabe in der Kreuzhaube mit einem Loch hat.

→ Ordentlich, falls sie toroidal oder kreuzhaubal ist.

→ $\leq d$-wirblig, falls $(G(C_{a,\text{[illegible]}}, \rho), \Omega(C_{a,\text{[illegible]}}, \rho))$ eine zylindrische Wiedergabe hat der Tiefe $\leq d$.

Satz 7.1.4: Seien $r, t \in \mathbb{N}$ und seien $U, d, T, R \gg r, t$.

Sei G ein Graph und sei M eine R-Masche in G. Dann gibt es eins von:

(a) einen von M gegriffenen K^t-Minor von G

(b) ein M-überlagerndes r, T-Abheften von G, wo alle Schubladen bis auf $\leq U$ flach sind und jede Schublade $\leq d$-wirbelig oder ordentlich ist.

Wir beweisen diesen Satz noch nicht.

Lemma 7.1.5: Seien $r, t \in \mathbb{N}$ und seien $T, R \gg r, t$.

Sei G ein Graph und sei M eine R-Masche in G.

Dann gibt es eins von:

(a) einen von M gegriffenen K^t-Minor von G

(b) ein M-überlagerndes r, T-Abheften.

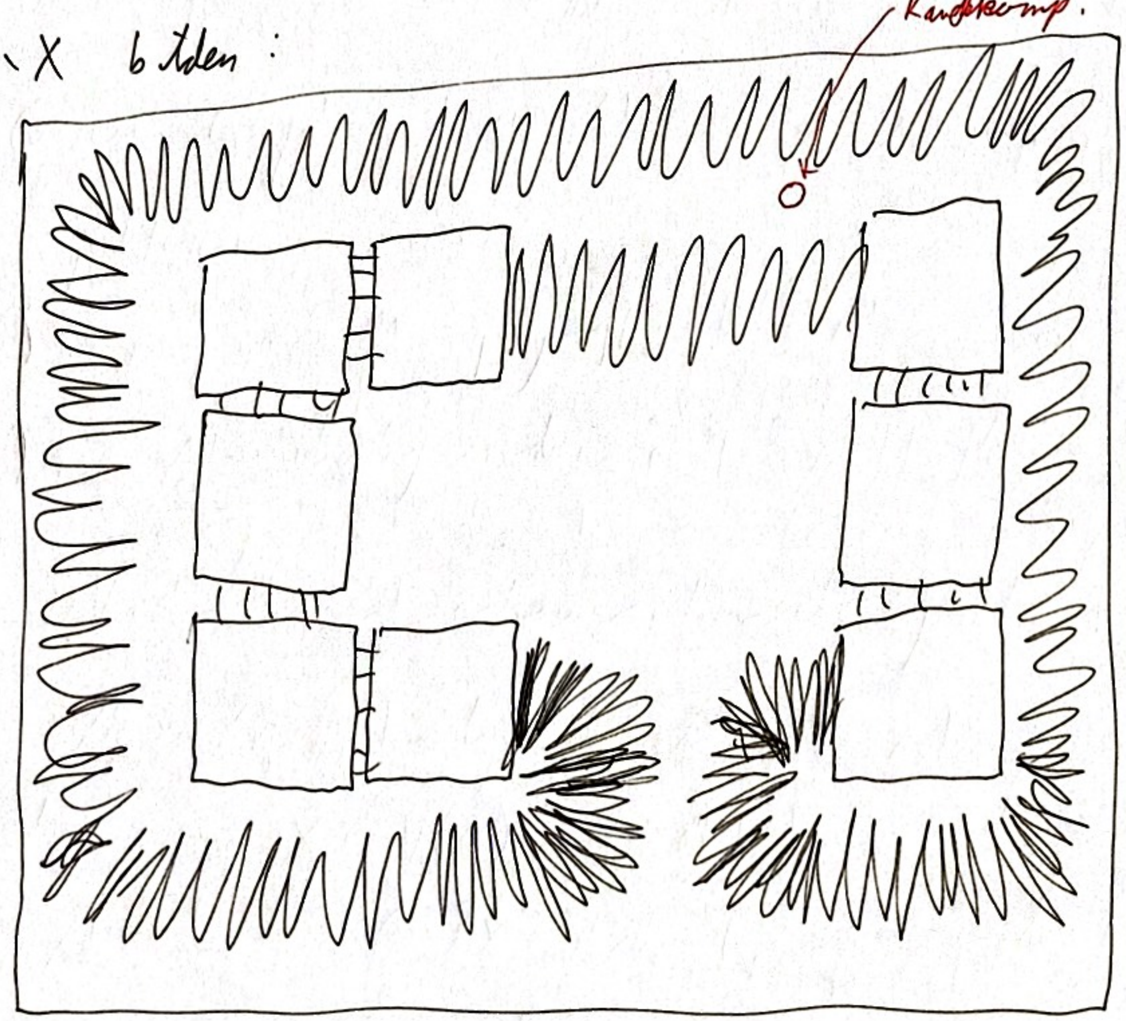
Beweis: Nach dem Flachenmaschensatz gibt es Ergebnis ~~flache [illegible]-Teilmasche M' von M~~.

(a) oder $X \subseteq V(G)$ mit $|X| \leq T$ und eine Teilmasche M' von M, die in $G \setminus X$ flach ist. Im zweiten Falle sei (A, B) eine Separation wie in Definition 4.1.4

und sei $\rho = (\Gamma, \sigma, \pi)$ die $A \cap B$-Wiedergabe von $(G \setminus X)[B]$.

Sei $\Sigma \cong S^2$ die Fläche, die entsteht, wenn man die Grenze von Δ entlang die Grenze einer anderen Kreisscheibe c_1 klebt. Sei

$\rho' := (\Gamma \cup \{c_1\}, \sigma \cup \{(c_1, A)\}, \pi)$. Wir finden $(r \times r)$-Teilmaschen von M' und Wegesysteme dazwischen nach folgendem Muster, die zusammen ein $1 \times r$-Aktenschrank in $G \setminus X$ bilden:



Dann ist $(X, \rho', A, (c_1))$ das gewünschte Abheften

7.2: Sprungbrette

Definition 7.2.1: Sei $\lambda = (X, \rho, A, (c_a)_{a \leq n})$ ein r, T-Abheften eines Graphen G mit n Schubladen. Ein <u>q-Sprungbrett</u> in λ ist ein Tripel (a, Z, H), sodass:

- → a ist eine flache Schublade von λ
- → H ist eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von $G \setminus X$, die A nicht treffen
- → $Z \subseteq X$ mit $G[Z \cup H]$ zusammenhängend
- → ~~Es gibt in $G(C_{1a}, \rho)$ einen CW~~
  Es gibt ein $((N(Z) \cap G(C_{1,a,\rho})) - A)$-Weg in $G \setminus X$.
- → Es gibt q disjunkte $((N(Z) \setminus G(C_{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor, a, \rho})) - A)$-Wege in $G \setminus X$.

2 Sprungbrette (a, Z, H) und (a', Z', H') heißen <u>disjunkt</u> falls $a \neq a'$, $Z \cap Z = \emptyset$ und $H \cap H' = \emptyset$.

Die <u>q-Sprungkraft</u> $S_q(\lambda)$ von λ ist die maximale Anzahl von paarweise disjunkte q-Sprungbrette.

<u>Lemma 7.2.2:</u> Seien $N_1 \dots N_q \subseteq V(G)$ und sei $A \subseteq G$, sodass es q disjunkte $(N_i - A)$-Wege in G gibt für alle $i \leq q$. Dann gibt es disjunkte Wege $P_1 \dots P_q$ in G, wobei P_i ein $(N_i - A)$-Weg ist.

<u>Beweis:</u> Übung

<u>Korollar 7.2.3:</u> Sei M eine Masche in G und sei λ ein M-überlagerndes r, T-Abheften von G mit n Schubladen. Sei $t \in \mathbb{N}$ und sei $q \gg t$. Falls $S_q(\lambda) \geq q$, so hat G einen von M gegriffenen K^t-Minor.

<u>Beweis</u>: Sei $\lambda = (X, \rho, A, (c_a)_{a \in n})$. Seien $(a_i, Z_i, H_i)_{i \leq q}$ die disjunkte q-Sprungbrette in λ. Nach Lemma 7.2.2 finden wir disjunkte Wege $P_1 \dots P_q$ in $G \setminus X$, wobei P_i ein $((N(Z_i) \setminus G(C_{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor, a_i}, \rho)) - A)$-Weg ist. Wir können P_i ~~zu~~ durch $Z_i \cup H_i$ zu einem A-Weg erweitern, ~~mit~~ mit der anderen Endecke in $G(C_{1,a}, \rho)$. So finden wir viele disjunkte lange Sprunge, und damit wie in Abschnitt 4.4 den gewünschten K^t-Minor. $\square$

<u>Definition 7.2.4</u>: Sei λ ein Ablektom. Die <u>Ordentlichkeit</u> $O(\lambda)$ von λ ist die Anzahl von ordentlichen Schubladen und die <u>Unebenheit</u> ~~von~~ $U(\lambda)$ ist die Anzahl von nicht-flachen Schubladen.

Lemma 7.2.5: Seien $r, t, T, q \in \mathbb{N}$ und seien $R, T', Q, d >> r, t, T, q$. Sei λ ein M-überlagerndes R,T-Abheften von einem Graphen G in dem es eine Schublade a gibt, die weder $\leq d$-wirbelig noch ordentlich ist.

Dann gibt es eins von:

(a) Einen von M gegriffenen K^t-Minor von G

(b) Ein M-überlagerndes r, T'-Abheften λ' von G, sodass:

$$O(\lambda') + U(\lambda') + S_q(\lambda') > O(\lambda) + U(\lambda) + S_Q(\lambda)$$

Dieses Lemma werden wir im nächsten Abschnitt beweisen. In diesem Abschnitt werden ~~wir~~ zeigen, wie man Satz 7.1.4 daraus folgen kann.

Zunächst wenden wir dieses Lemma induktiv an, um folgendes zu beweisen:

Korollar 7.2.6: Sei $k \in \mathbb{N}$. Seien $q, r, t \in \mathbb{N}$. Seien $d, T, R \gg r, t, k, q$. Sei G ein Graph und M eine R-Masche in G. Dann gibt es eins der folgenden Sachen:

(a) Einen von M gegriffenen K^t-Minor von G

(b) Ein M-überlagerndes r, T-Abheften λ von G mit $U(\lambda) < k$, in dem jede Schublade ordentlich oder d-wirbelig ist.

(c) Ein M-überlagerndes r, T-Abheften λ von G mit $O(\lambda) + U(\lambda) + S_q(\lambda) \geq k$.

Beweis: Per Induktion nach k. Der Induktionsanfang folgt aus Lemma 7.1.5, und der Induktionsschritt folgt aus Lemma 7.2.5. □

<u>Lemma 7.2.7:</u> Sei a eine nicht-flache Schublade in einem Abheften $(X, \rho, A, (c_a)_{a \in n})$. Dann gibt es ein $\Omega(C_{a,10}, \rho)$-Kreuz in $G(C_{a,10}, \rho)$, dessen 4 Ecken in verschiedenen ~~Schubladen liegen~~ Verzweigungsmengen von A liegen.

<u>Beweis:</u> Übung.

<u>Beweis von Satz 7.1.4:</u> Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $r \geq \frac{t(t-1)}{2} + 20$. Wir wenden Korollar 7.2.6 an mit $k = U$ und $U \gg q \gg t$. Mit den Ergebnissen (a) oder (b) wären wir schon zufrieden. Also nehmen wir an, dass es ein M-überlagerndes r, T-Abheften λ von G gibt mit $O(\lambda) + U(\lambda) + S_q(\lambda) \geq k = U$.

Da $U(\lambda) \geq O(\lambda)$, folgt $2U(\lambda) + S_q(\lambda) \geq U$.

Fall 1: $U(\lambda) \geq t(t-1)$. Dann finden wir nach Lemma 7.2.7 und Lemma 4.3.2 einen K^t-Minor wie in (a).

Fall 2: $S_q(\lambda) \geq q$. Dann finden wir nach Korollar 7.2.3 einen K^t-Minor wie in (a). □

7.3 Verbessern eines Abheftens:

In diesem Abschnitt beweisen wir

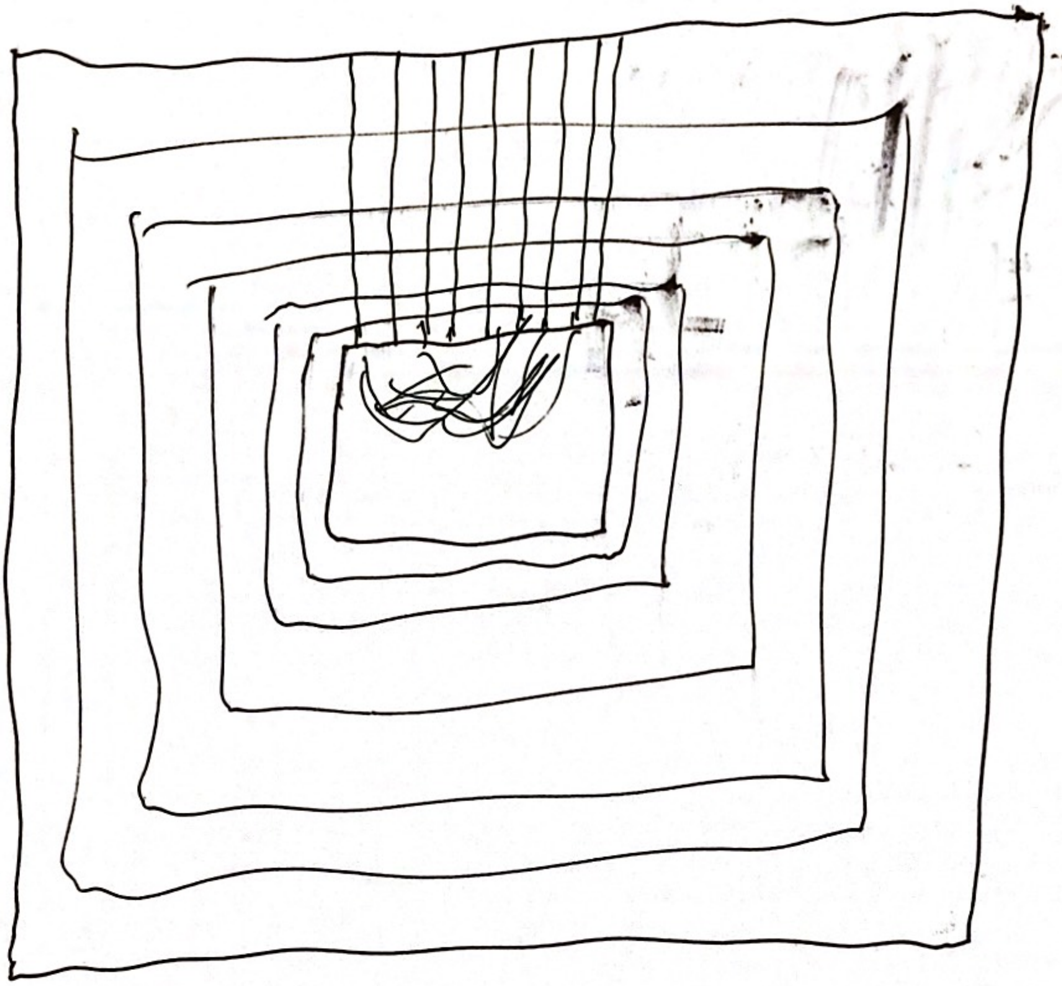
Lemma 7.2.5. Seien $r, t, T, q \in \mathbb{N}$ und seien $R, T', Q, d, \gg r, t, T, q$. Sei λ ein M-überlagerndes R, T-Abheften von einem Graphen G. Sei a_0 eine Schublade in λ, die weder εd-wirbelig noch ordentlich ist.

Sei $\lambda = (X, \rho, A, (c_a)_{a \le n})$. ~~Sei $(a_i, Z_i, H_i)_{i \le}$~~

Sei $(a_i, Z_i, H_i)_{i \le s_Q(\lambda)}$ eine maximale Familie von disjunkten Q-Sprungbretten in λ.

Sei $G' = G \setminus \left(\left(\bigcup_{i \le s_Q(\lambda)} H_i \right) \cup X \right)$, und sei $\rho' = (\Gamma, \sigma', \pi')$ die von ρ induzierte wirbelnde Wiedergabe von $(G', \emptyset)$.

Sei $G_{a_0} := G'\left(C_{a_0, \lfloor \frac{R}{4} \rfloor}(A), \rho' \right)$ und $\Omega_{a_0} := \Omega\left(C_{a_0, \lfloor \frac{R}{4} \rfloor}(A), \rho' \right)$. Da a_0 nicht $\le d$-wirbelig ist, gibt es nach Satz 5.2.4 eine schiefe Verbindung $\mathbb{P}$ von (G_{a_0}, Ω_{a_0}) der Größe $\lfloor \frac{d+5}{8} \rfloor$.



Sei N die größte Masche in $A\left[\bigcup_{\substack{1 \le p \le r \\ 1 \le q \le r}} X_{p+(2a_0-1)r,q}\right]$.

und seien $\mathcal{S} := \{S_1, S_2 \dots S_r\}$ und

$\mathcal{W} = \{W_1, W_2 \dots W_r\}$ die Mengen von Senkrechten

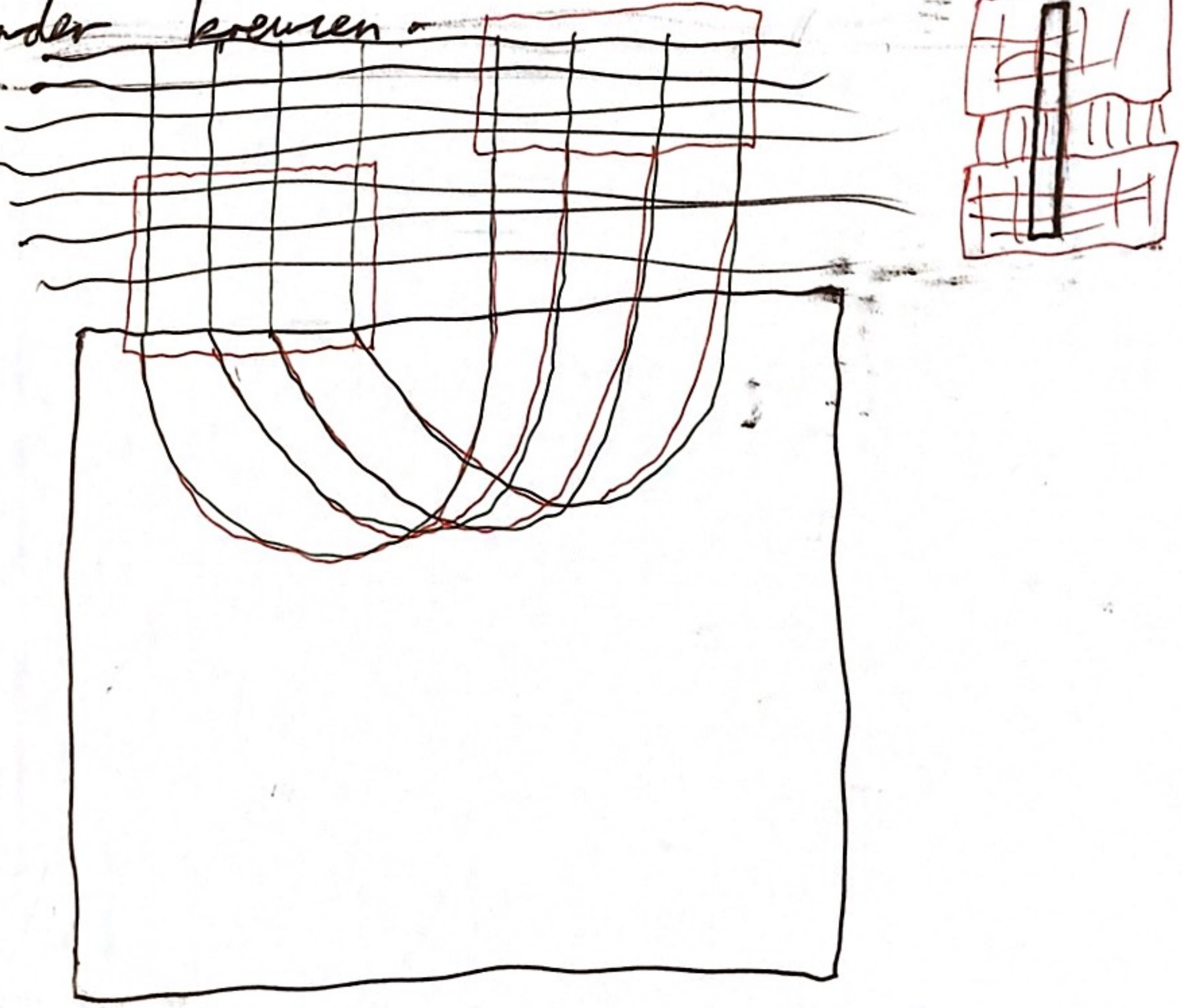
und waagerechten Wegen in N. O.B.d.A. können

wir annehmen, dass $\mathcal{P}$ außerhalb von $G'(C_{a_0,d}(A), \rho')$

nur Kanten der Wege aus $\mathcal{S}$ benutzen (Übung 4, Blatt 8).

Nach dem Satz von Erdös und Szekeres gibt es entweder viele Wege aus $\mathcal{P}$, die einander kreuzen, oder viele, die einander nicht kreuzen.

<u>Fall 1</u>: Es gibt $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ mit $|\mathcal{P}'| = 2s$, wobei $s \gg r, t$, sodass die Wege in $\mathcal{P}'$ alle einander kreuzen.



Seien $S_1, \dots S_{4s}$ die Wege aus $\mathcal{S}$, die Wege aus $\mathcal{P}'$ außerhalb von $G'(C_{a_0,d}(A), \rho')$ treffen.

in dieser Reihenfolge von links nach rechts in N.

Sei $P_i'' \in \mathcal{P}'$ der Weg, der auf dieser Weise S_i trifft. Also ist ein Anfangsstück von P_i ein Teilweg von S_i' und ein Endstück von P_i ein Teilweg von S_{i+2s}'.

Sei W_i' der eindeutige S_1'-S_{2s}'-Weg in $V_{d+s+1-i}$ für $1 \leq i \leq s$ und der eindeutige S_{2s+1}'-S_{4s}'-Weg in V_{d+i} für $s < i \leq 2s$. Sei N' die $2s \times 2s$-Masche, deren waagerecht Wege die V_i' sind und deren senkrechte Wege Teilwege der P_i sind. Nach Satz 4.4.2 und Satz 4.4.3 gibt es Ergebnis (a) oder ein $y \ll R, T', Q, d$, eine Menge $Y \subseteq V(G_{aug})$ mit $|Y| \leq y$ und eine Teilmasche N'' von N' auf einem Intervall der Weite $s' \gg r$, deren y-Inneres in $G_{a_0} \setminus Y$ flach ist. Sei Σ die Fläche, die entsteht, ~~wenn~~ indem wir beide Enden eines verdrehten Streifen entlang disjunkten Segmenten von

$$\partial \Delta(C_{a_0,d+10}(A), \rho') \text{ zu}$$

$$\Delta^- := \Delta \setminus \mathring{\Delta}(C_{a_0,d+10}(A), \rho') \text{ kleben.}$$

Nach Lemma 6.3.4 gibt es ein Σ-gebiet $(G'', \bar{\rho})$ in $G' \setminus Y$, sodass:

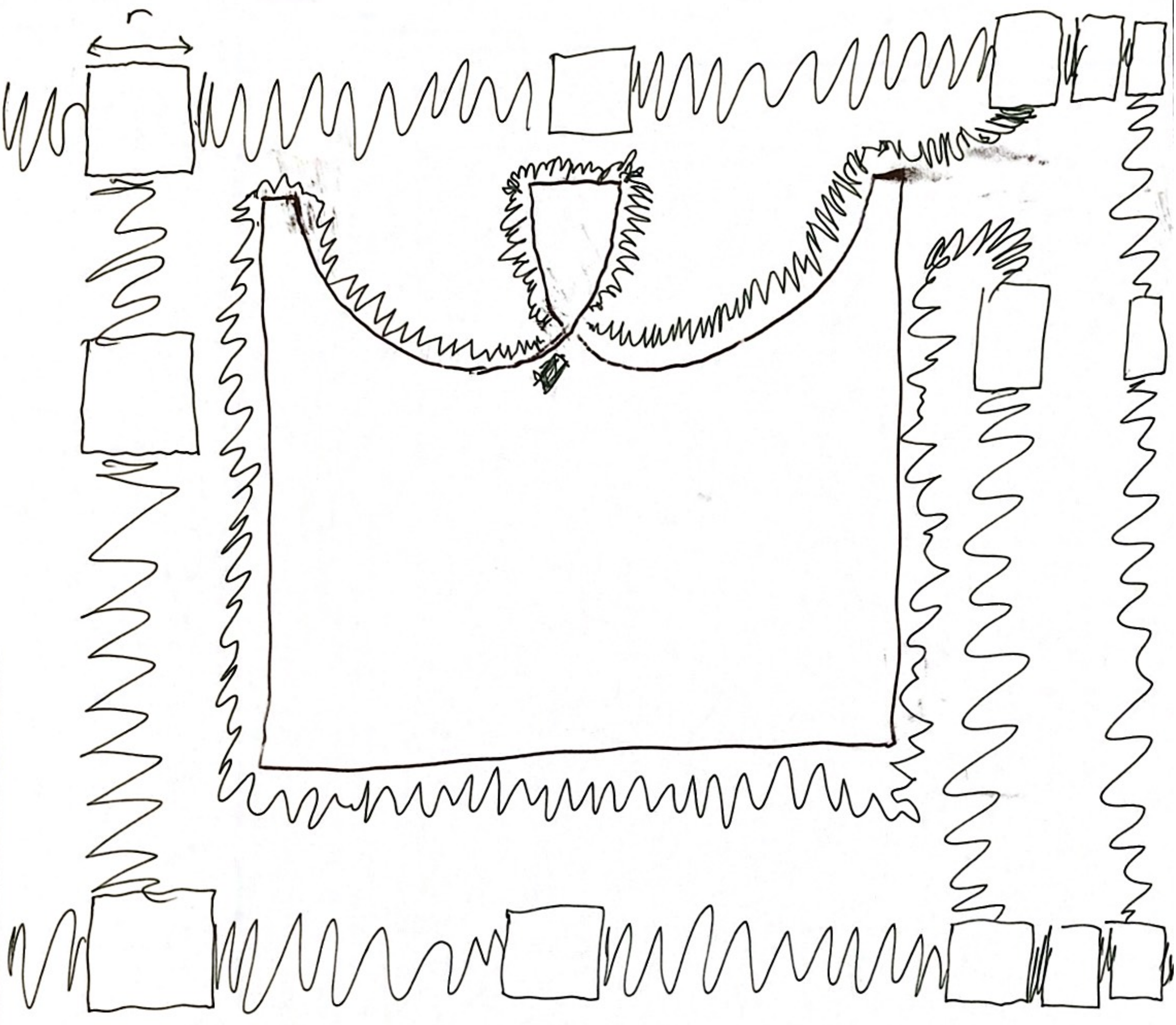
→ $(G' \setminus Y) \setminus G'(C_{a_0,d+10}(A), \rho') \subseteq G''$

→ G'' enthält $s' - 10$ ~~senkr~~ senkrechte Wege von N'

→ $\bar{\rho}$ stimmt auf Δ^- mit ρ' überein.

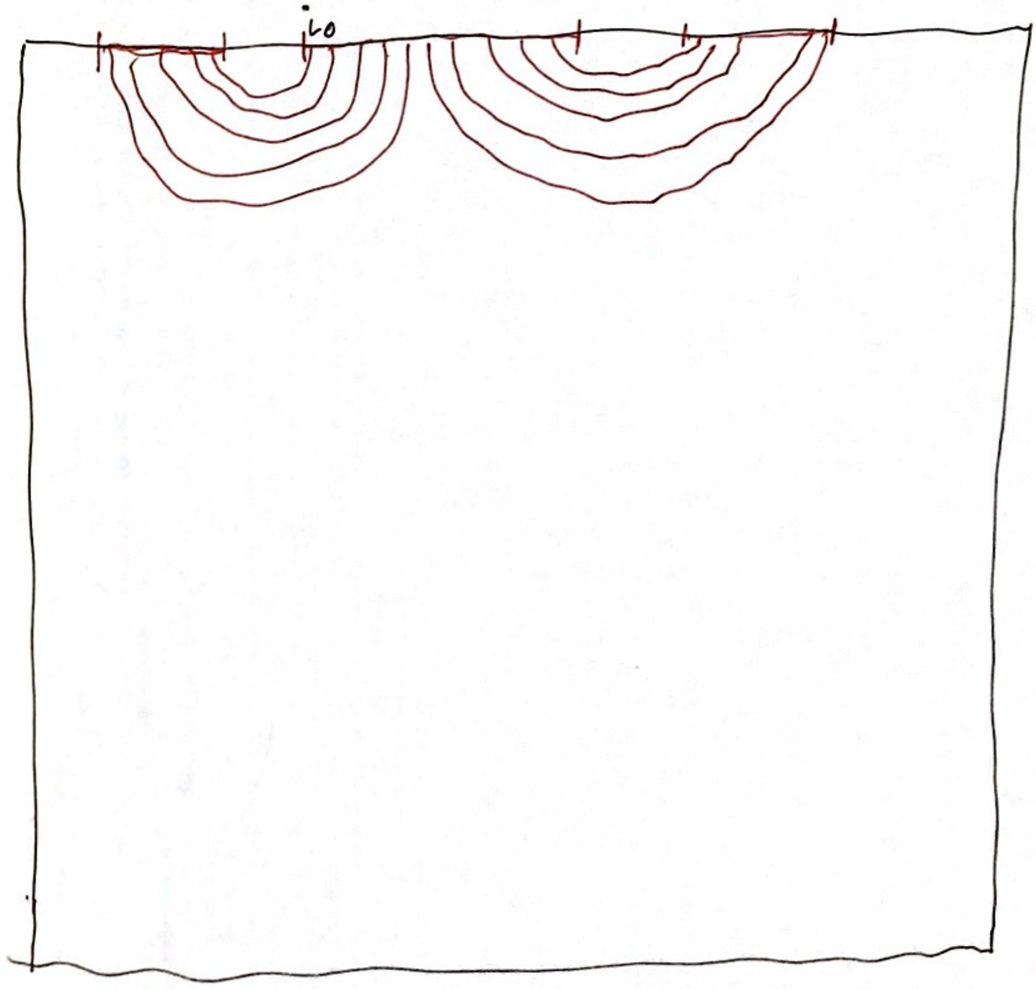
Nun finden wir nach folgendem Muster ein $r, n+1$-Aktenschrank A' in G', sodass es ein dazu passendes $r, T+y$-Abheften

$(X \cup Y, A', p''(c'_a)_{a \in n+1})$ von G gibt mit einer weiteren kreuchaubaden Schublade:



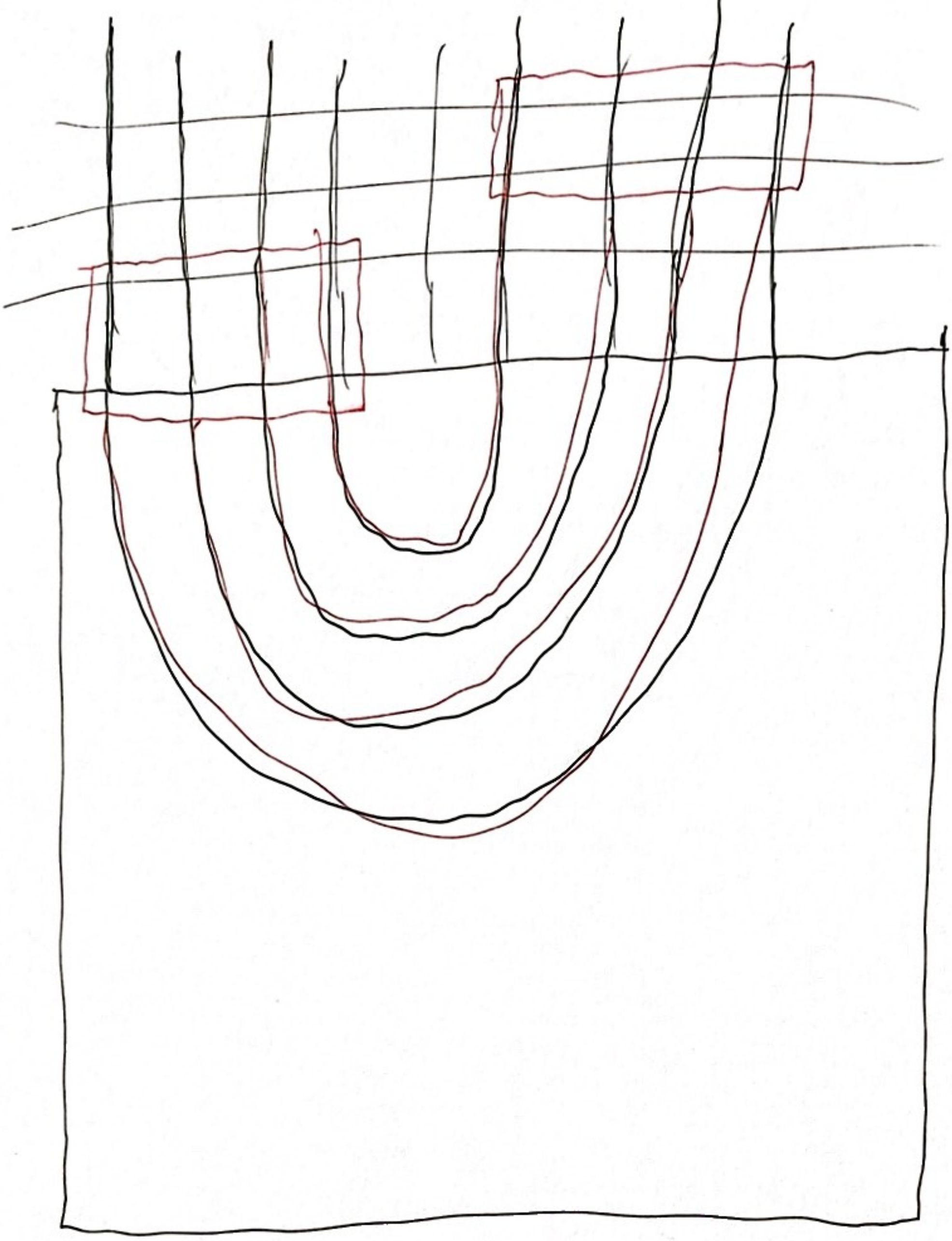
<u>Fall 2:</u> Es gibt eine planare Verbindung $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ mit $|\mathcal{P}'| = 4s$, wobei $s \gg r, t$.

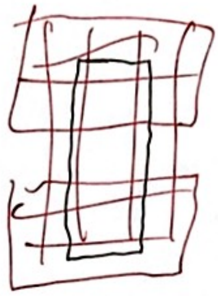
Seien $S_1' \dots S_{8s}'$ die Wege aus $\mathcal{S}$, die Wege aus $\mathcal{P}'$ außerhalb von $G'(G_{a,r,d}[A], \rho')$ treffen, in dieser Reihenfolge in N, und sei $P_i \in \mathcal{P}'$ der Weg, der auf dieser Weise S_i trifft.



Also gibt es ein eindeutiges $i_0 \le 4s$, sodass $\mathcal{P}' = \{P_{i_0+j} : j \le 4s\}$. Falls $i_0 < 2s$, so setzen wir $P_j' := P_{i_0+2s+j}$ für $j \le 2s$, und falls $i_0 \geq 2s$, so setzen wir $P_j' := P_{i_0-2s+j}$. Seien $S_1'' \dots S_{4s}''$ die Wege aus $\mathcal{S}$, die diese Wege P_i' außerhalb von $G'(C_{a_0d}(A), \rho')$ treffen, in dieser Reihenfolge in N. Also ist ein Anfangsstück von P_i' ein Teilweg von S_i'' und ein Endstück von P_i' ein Teilweg von S_{4s+1-i}''.

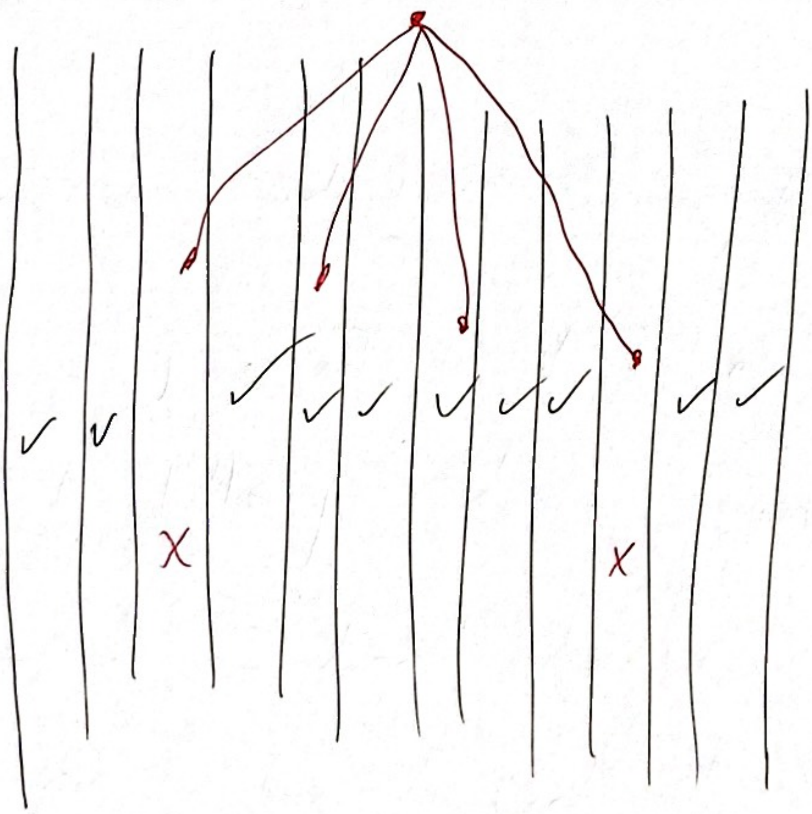
Sei W_i' der eindeutige S_1''-S_{2s}''-Weg in $W_{d+s+1-i}$ für $i \le s$ und der eindeutige S_{2s+1}''-S_{4s}''-Weg in W_{d+i} für $s < i \le 2s$. Sei N' die Masche, deren waagerechte Wege die W_i' sind und deren Senkrechte Wege Teilwege der P_i' sind.





Nach Satz 4.4.2 und Satz 4.4.3 gibt es Ergebnis (a) oder ein $y \ll R, T', Q, d$, eine Teilmenge $Y \subseteq V(G_{a_0})$ mit $|Y| \leq y$, und eine Teilmasche N'' von N' auf einem Intervall der Weite $s' \gg r, y$, deren y-Inneres in $G_{a_0} \setminus Y$ flach ist, Sei $(\hat{A}, \hat{B})$ eine entsprechende Separation von G_{α_0} und $\hat{\rho}$ eine entsprechende Wiedergabe von $G_{\alpha_0}[\hat{B}]$ wie in Definition 4.1.4.

In N' gibt es $2y+1$ disjunkte Intervalle $(N_i)_{i \leq 2y+1}$ der Weite $\left\lfloor \frac{s'}{2y+1} \right\rfloor$ in dieser Reihenfolge von links nach rechts. Für $i \leq 2y+1$ sei sei D_i der äußere Kreis des y-Inneres von N_i



Für $x \in Y$, sei i_x das maximale i und j_x das minimale i, sodass x einen Nachbarn in

$(G_{a_0} \setminus Y)[\hat{B}](D_i, \hat{\rho})$ hat, falls es ein solches i gibt, und sei $i_x = j_x = 0$ sonst. Sei

$$i_0 \in [2y+1] \setminus \bigcup_{x \in Y} \{i_x, j_x\}.$$ Sei

$$Y' = \{x \in Y \mid x \text{ hat einen Nachbarn in } (G_{a_0} \setminus Y)[\hat{B}](D_{i_0}, \hat{\rho})\}.$$

Also ist $G'_{a_0} := (G_{a_0} \setminus Y)[\hat{B}](D_{i_0}, \hat{\rho})$ flach in $G_{a_0} \setminus Y'$ und jede Ecke $x \in Y'$ hat Nachbarn links und rechts davon.

Sei Σ die Fläche die entsteht, indem wir beiden Enden eines nicht-verdrehten Streifen entlang disjunkten Segmenten von $\partial \Delta(C_{a_0, d+2s+10}(A), \rho')$ zu $\Delta^- := \Delta \setminus \mathring{\Delta}(C_{a_0, d+2s+10}(A), \rho')$ kleben. Nach Lemma 6.3.4 gibt es ein Σ-Gebiet $(G'', \bar{\rho})$ in $G' \setminus Y'$, sodass:

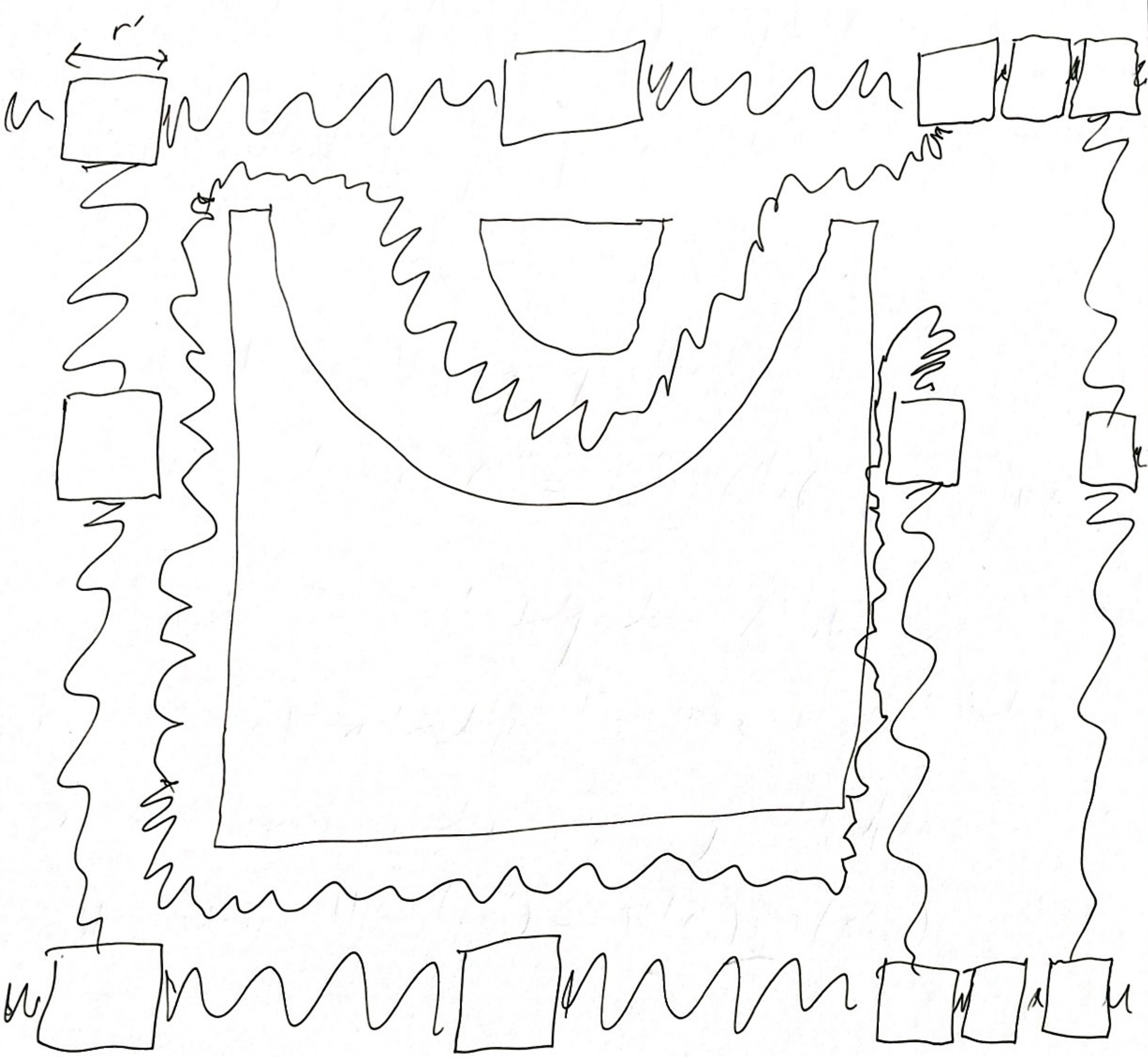
$\longrightarrow G' \setminus Y' \setminus \left(G'\left(C_{a, d+2s+10}(A), \rho' \right) \right) \subseteq G''$

$\longrightarrow G''$ enthält $\left\lfloor \frac{s'}{2y+1} \right\rfloor - 10$ ~~vert~~ senkrechte Wege von N_{10}.

$\longrightarrow \bar{\rho}$ stimmt auf Δ^- mit ρ' überein.

Sei H die Vereinigung aller G''-Brücken in $G_{a_0} \setminus Y'$ und sei $G''' = \left(G' \setminus G'\left(C_{a_0, \lfloor \frac{s}{2} \rfloor - 1}, \rho' \right) \right) \cup G_{a_0}$.

Also finden wir nach folgendem Muster ein $r', n+1$-Aktenschrank A' mit $r'' \gg r$ in G''', sodass es ein dazu passendes $r', T+y$-Abheften von G'' gibt, sodass $V(H) \cap V(G''') \subseteq \sigma(c'_{a_0}) \cup \sigma(c'_{a_0+1})$:



~~Sei~~ Wir wählen s'' mit $r << s'' << s'$

Sei $H^+ := G'''(C_{a_0,s''}(A'), \bar{p}) \cup H \cup G'''(C_{a_0+1,s''}(A'), \bar{p})$.

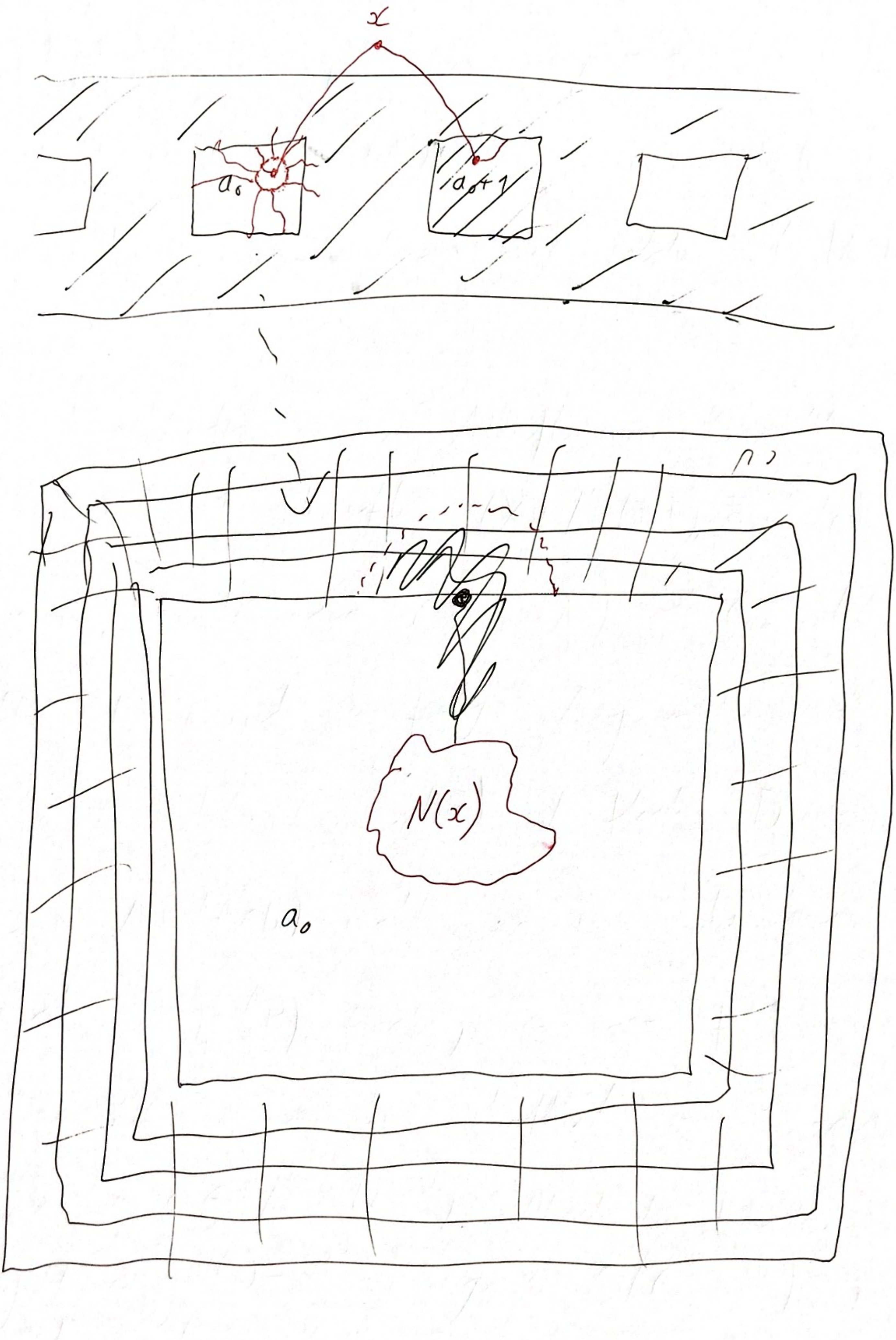
<u>Fall 2.1:</u> Es gibt s'' disjunkte Wege von

$C_{a_0,s''}(A')$ nach $C_{a_0+1,s''}(A')$ in H^+.

Übung (ähnlich wie vorherige Argumente).

Fall 2.2: Es gibt eine Separation $(\bar{A}, \bar{B})$ von H^+ mit $V(C_{a_0,s''}(A')) \subseteq \bar{A}$, $V(C_{a_0,r''}(A')) \subseteq \bar{B}$ und $|\bar{A} \cap \bar{B}| < s$. Wir nehmen eine solche mit $|\bar{A} \cap \bar{B}|$ minimal.

Also finden wir ~~ein Abheften von G~~ ein $r', n+1$ Abheften $(X \cup Y' \cup (\bar{A} \cap \bar{B}), \bar{\bar{P}}, A'', (c_i')_{0 \leq n+1})$ von G. Falls weder $C_{a_0,10}(A'')$ noch $C_{a_0+1,10}(A'')$ flach ist, so sind wir fertig. Angenommen also O.B.d.A. $C_{a_0+1,10}(A'')$ ist flach. Dann kann $Y' \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$ nicht leer sein, da dann auch $(C_{a_0})_R(P)$ flach generen wäre für ein $P \in \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, was die Schiefheit von $\mathcal{P}$ widerspricht. Sei also $x \in Y' \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$. Nach der Konstruktion gibt es $(N(x) - A'')$-Wege in $G'(C_{a_0,1}(A''), \bar{\rho})$ und $G'(C_{a_0+1}(A''), \bar{\rho})$


x
a_0
a_0+1
N(x)
a_0

Sei nun $(\tilde{A}, \tilde{B})$ eine maximale Separation von $G'(C_{a_0, q+2}(A''), \bar{\rho})$ mit folgenden Eigenschaften:

→ Jede Komponente von $\tilde{A}$ trifft $N(x)$

→ $C_{a_0, q+2}(A'') \subseteq \tilde{B}$

→ $|\tilde{A} \cap \tilde{B}| \leq q$.

Dann gibt es ein $i \leq q+1$ mit $V(C_{a_0,i}(A'')) \cap \tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset$ und deshalb $C_{a_0,i}(A'') \subseteq \tilde{A} \setminus \tilde{B}$ oder $C_{a_0,i}(A'') \subseteq \tilde{B} \setminus \tilde{A}$. Ersteres ist nicht möglich, da es mehr als q disjunkte $(C_{a_0,i} - C_{a_0,q+2})$-Wege gibt. Also gilt $C_{a_0,i}(A'') \subseteq \tilde{B} \setminus \tilde{A}$, woraus folgt $\tilde{A} \subseteq G'(C_{a_0,i}(A''), \rho)$.

Gäbe es ~~eine Menge S~~ einen $(\tilde{A} - C_{a_0,q+2})$-Trenner S mit $|S| < q$, so könnten wir $\tilde{A}'$ als ~~Ã~~ die Vereinigung von S mit allen Komponenten von $G' \setminus S$, die $\tilde{A}$ treffen und $\tilde{B}'$ als die Vereinigung von S mit allen anderen

Komponenten definieren, und $(\tilde{A}', \tilde{B}')$ wäre echt größer als $(\tilde{A}, \tilde{B})$ (als Separation), was die Maximalität von $(\tilde{A}, \tilde{B})$ widersprechen würde.

Also gibt es nach dem Satz von Menger q disjunkte ~~Wege von $\tilde{A}$~~ $(\tilde{A} - C_{a_0, q+2})$-Wege.

Dann können wir $\left(a_0+1, (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup \{x\}, G[\tilde{A} \setminus \tilde{B}]\right)$ als weiteres Sprungbrett in einem passenden Abheften nehmen.