Universität Hamburg

Mathematik II für Holzwirte

Vorlesung im Sommersemester 2013

Stefan Suhr,
LaTeX: Timothy Jahn

Literatur

1. Teil der Vorlesung:

G. G. Grämlich: "Lineare Algebra. Eine Einführung", 3. Auflage, Hanser Verlag, München, 2011

2. T. Andreae: "Ergänzungsskript zur Mathematik II für Studierende der Holzwirtschaft", Hamburg, 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen **2**
1.1 Was ist eine lineare Gleichung? . . . 2
1.2 Gleichungen in n Variablen . . . 4
1.3 Darstellung von LGS als Matrizen . . . 4

2 Elementare Umformung und Zeilenstufenform **6**
2.1 Elementare Gleichungsumformungen . . . 6
2.2 Zeilenstufenform . . . 7
2.3 Das Gauß- und das Gauß-Jordan-Verfahren . . . 8

3 Mehr über Matrizen **12**
3.1 Operationen mit Matrizen . . . 13

4 Lösen quadratischer Systeme durch Matrixinvertierung **16**
4.1 Invertierung quadratischer Matrizen . . . 16
4.2 Verbindung zur Lösbarkeit von LGS . . . 18
4.3 Berechnung von Inversen . . . 19

5 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ **21**
5.1 Operationen auf dem $\mathbb{R}^2$ . . . 21
5.2 Das Skalarprodukt . . . 23
5.3 Winkel zwischen Vektoren . . . 25
5.4 Orthogonale Projektion . . . 26

6 Analytische Geometrie von Geraden und Ebenen sowie reelle Vektorräume **27**
6.1 Geraden . . . 27
6.2 Ebenen . . . 28

7 Reelle Vektorräume und Untervektorräume **32**
7.1 Reelle Vektorräume . . . 32
7.2 Untervektorräume von Vektorräumen . . . 35

8 Linearkombinationen und lineare Unabhängigkeit **37**
8.1 Spalten- und Zeilenraum einer Matrix . . . 38
8.2 Die vier Fundamentalräume einer Matrix . . . 38
8.3 Der Spaltenraum einer Matrix . . . 39
8.4 Lineare Unabhängigkeit . . . 40

9 Die Struktur der Lösungsmenge von $Ax = b$ **42**
9.1 Basis und Dimension . . . 42
9.2 Die Struktur der Lösungsmenge von Ax=b . . . 44
9.3 Zeilenbild einer Matrix . . . 45

10 Konstruktion von Basen für die Fundamentalräume einer Matrix **45**
10.1 Basen für die Fundamentalraäume einer Matrix . . . 45
10.2 Konstruktion einer Basis für $Z(A)$ . . . 47
10.3 Konstruktion einer Basis von $\ker(A)$ . . . 48
10.4 Basis von allgemeinen Unterräumen . . . 48
10.5 Die Dimension der vier Fundamentalräume . . . 49

11 Orthogonalität **50**
11.1 Orthogonale Projektionen . . . 51
11.2 Bedeutung für lineare Gleichungssysteme . . . 52
11.3 Orthogonal- und Orthonormalbasen . . . 53
11.4 Gram-Schmidt-Verfahren . . . 54

12 Determinanten **55**
12.1 Determinanten für $n > 2$ . . . 57

13 Eigenwerte und Eigenvektoren **60**
13.1 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren . . . 61
13.2 Diagonalisierbarkeit einer Matrix . . . 63

1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Lineare Gleichungssysteme (LGS) treten in vielen Anwendungsgebieten der Mathematik auf, z.B. der Ökonometrie, der Elektrotechnik oder der Computergrafik. Weiterhin werden in fast allen Bereichen der numerischen Mathematik (d.h. Computermathematik usw.) LGS verwendet (als Lösungen von Differentialgleichungen).

1.1 Was ist eine lineare Gleichung?

Zu Anfang ein bekanntes Beispiel:

Beispiel 1.

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 5 \\ \Leftrightarrow 2x &= 8 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \end{aligned}$$

Allgemein lässt sich eine lineare Gleichung in einer Variablen (Unbekannten) darstellen mit:

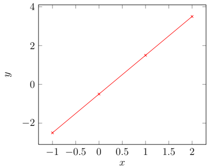
$$ax = b \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}$$

Beispiel 2. *Ein Beispiel für eine lineare Gleichung in zwei Variablen:*

$$4x - 2y = 1$$

<u>Lösung:</u> Setze $x =: t$ *und somit* $2y = 4t - 1 \Leftrightarrow y = 2t - \frac{1}{2}$.
D.h. jedes Paar (x, y) *mit* $x = t$ *und* $y = 2t - \frac{1}{2}$ *löst die Gleichung. Umgekehrt lässt sich jede Lösung in dieser Form schreiben:*

$$\rightsquigarrow \textit{Lösungsmenge } \mathbb{L}_1 = \{(t, 2t - \tfrac{1}{2}) | t \in \mathbb{R}\}$$



Alternativ: Setze $y = s$ *und forme um:*

$$\begin{aligned} y = s \Rightarrow 4x &= 2s + 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{s}{2} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{L}_2 = \{\left(\tfrac{s}{2} + \tfrac{1}{4}, s\right) | s \in \mathbb{R}\}$$

Behauptung 1. $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$ *(Dies ist in der Abbildung offensichtlich!)*

Beweis. Sei $(\frac{s}{2} + \frac{1}{4}, s) \in \mathbb{L}_2$. Setze

$$\begin{aligned} t = \frac{s}{2} + \frac{1}{4} &\Rightarrow s = 2t - \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \left(\frac{s}{2} + \frac{1}{4}, s\right) = \left(t, 2t - \frac{1}{2}\right) \in \mathbb{L}_1 \\ &\Rightarrow \mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{L}_1. \end{aligned}$$

Sei nun $(t, 2t - \frac{1}{2}) \in \mathbb{L}_1$. Setze

$$\begin{aligned} s = 2t - \frac{1}{2} &\Rightarrow t = \frac{s}{2} + \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \left(t, 2t - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{s}{2} + \frac{1}{4}, s\right) \in \mathbb{L}_2 \\ &\Rightarrow \mathbb{L}_1 \subseteq \mathbb{L}_2, \end{aligned}$$

und somit $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$. $\square$

1.2 Gleichungen in n Variablen

Seien $a_1, ..., a_n, b \in \mathbb{R}$ gegeben.

Die Gleichung

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = b \tag{1}$$

heißt eine *lineare Gleichung in den Variablen* $x_1, ..., x_n$. Die Menge der Lösungen von 1 heißt *allgemeine Lösung* oder *Lösungsmenge*. Wir nennen $a_1, ..., a_n$ Koeffizienten und b einfach die rechte Seite.
Nach dem Beispiel 1.1 ist $x = x_1$, $y = x_2$, $a_1 = 4$, $a_2 = -2$ und $b = 1$.

Im Allgemeinen treten lineare Gleichungen nicht einzeln auf, sondern als *linearen Gleichungssysteme*. Zum Beispiel:

Beispiel 3. *Suche* (x_1, x_2) *mit:*

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 11 \end{aligned}$$

(Beachte: zwei Gleichung und zwei Unbekannte/Variablen.)

Ein allgemeines LGS hat die Form:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered} \tag{2}$$

(m Gleichungen, n Variablen)

i) Das System 2 heißt *konsistent* oder *lösbar*, falls eine Lösung existiert.

ii) Das Gleichungssystem 2 heißt *inkonsistent* oder *unlösbar*, falls keine Lösung existiert.

iii) Falls $b_1 = ... = b_m = 0$ gilt, heißt das LGS 2 *homogen*. Homogene Systeme haben immer die triviale Lösung $x_1 = ... = x_n = 0$ (Andere Lösungen können existieren).

iv) Zwei LGS heißen *äquivalent*, falls ihre Lösungsmengen übereinstimmen.

So haben z.B. die beiden Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 &= -7 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} 8x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 10x_1 - 2x_2 &= 14 \end{aligned}$$

beide $(2, 3)$ als (einzige) Lösung.

1.3 Darstellung von LGS als Matrizen

Im Schema 2 ist immer klar, welcher Koeffizient zu welcher Variablen gehört (a_{ik} gehört immer zu x_k). Schreibe 2 als Matrixschema:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{3}$$

Merke: Das Element in der j-ten Spalte ist mit x_j zu multiplizieren, zwischen die Spalten ist jeweils ein $+$ und zwischen die n-te und $n+1$-te Spalte ein $=$ zu setzen, damit man wieder 2 erhält.
Schema 3 nennt man *erweiterte Koeffizientenmatrix* von 2. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt *Koeffizientenmatrix* von 2. Die Koeffizientenmatrix enthält die rechte Seite $(b_1, ..., b_m)$ **nicht**.

Beispiel 4. *Lineares Gleichungssystem:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen ist eine Matrix ein rechteckiges Zahlenschema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Man nennt dies eine *reelle Matrix mit m Zeilen und n Spalten* oder *(m,n)-Matrix*. Die a_{ij} heißen *Elemente der Matrix*.

2 Elementare Umformung und Zeilenstufenform

Es stellen sich folgende Fragen:

1. Wie löst man ein lineares Gleichungssystem?
2. Gibt es immer eine Lösung?
3. Wie viele Lösungen gibt es?

Diese Fragen lassen sich allesamt mithilfe **Elementarer Gleichungsumformungen** beantworten.

2.1 Elementare Gleichungsumformungen

i) Vertauschen von zwei Gleichungen.

ii) Multiplikation einer Gleichung mit einer von Null verschiedenen Konstanten.

iii) Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

Beispiel 5.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 18 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_2 - 7x_3 &= -17 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Satz 1. *Elementare Zeilenumformungen ändern die Lösungsmenge eines LGS nicht. D.h. LGS, die durch Gleichungsumformungen auseinander hervorgehen, sind äquivalent.*

Für die erweiterte(!) Koeffizientenmatrix liefern die linearen Gleichungssysteme die **elementaren Zeilenumformungen**:

i) Vertauschen zweier Zeilen.

ii) Multiplikation einer Zeile mit einer von Null verschiedenen Konstante.

iii) Addition eines Vielfachen einer Zeile mit einer anderen Zeile.

Beispiel 6. *Analog zu Beispiel 5:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

i)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

ii)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 18 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

iii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 Zeilenstufenform

1. Allen Zeilen, die nur Nullen enthalten, stehen unten in der Matrix.

2. Wenn eine Zeile nicht ausschließlich aus Nullen besteht, so ist der erste von Null verschiedene Eintrag dieser Zeile eine Eins (*führende Eins* dieser Zeile).

3. In zwei aufeinanderfolgenden Zeilen, die nicht verschwindende Elemente enthalten, steht die führende Eins der unteren Zeile rechts von der führenden Eins der oberen Zeile.

Beispiel 7.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind in Zeilenstufenform;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

*ist **nicht** in Zeilenstufenform.*

Satz 2. *Jede Matrix lässt sich auf Zeilenstufenform bringen. Gilt zusätzlich zu 1.-3. noch:*

4. Keine Spalte mit führender Eins enthält andere von Null verschiedene Einträge.

*spricht man von einer **reduzierten Zeilenstufenform**.*

Beispiel 8.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
haben reduzierte Zeilenstufenform;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
*haben **nicht** reduzierte Zeilenstufenform.*

Satz 3. *Jede Matrix lässt sich durch elementare Zeilenumformung auf reduzierte Zeilenstufenform bringen.*

Kurz gesagt: Liegt eine Matrix in Zeilenstufenform vor, so stehen unter einer führenden Eins nur Nullen. Liegt sie in reduzierter Zeilenstufenform vor, so stehen auch über jeder führenden Eins nur Nullen.

Die Lösungsmenge eines LGS, dessen erweiterte Koeffizientenmatrix in reduzierter Zeilenstufenform vorliegt, lässt sich sehr einfach bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 + 4x_4 &= -1 \\ x_2 + 2x_4 &= 6 \\ x_3 + 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Man nennt x_1, x_2, x_3 jeweils **führende Variable**, x_4 ist eine **freie Variable**. Wie in Beispiel 1.1 können wir x_4 frei wählen. Setze $x_4 = t$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1 &= -1 - 4t \\ x_2 &= 6 - 2t \\ x_3 &= 2 - 3t \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{L} = \{(-1-4t, 6-2t, 2-3t)\,|t \in \mathbb{R}\}$$

Wie bekommt man ein LGS auf reduzierte Zeilenstufenform? Die elementare Zeilenumformung kann man nun zu einem Algorithmus ausbauen, um die eingehenden drei Fragen zu beantworten.

2.3 Das Gauß- und das Gauß-Jordan-Verfahren

Dies sind Verfahren, die auch in der Anwendung zur Lösung von LGS eingesetzt werden. Mit diesem Algorithmus kann man bestimmen, ob ein LGS Lösungen besitzt und diese auch bestimmen.

Algorithmus 1. ***(Gauß-Jordan-Verfahren)***

1. *Bestimme die am weitesten links stehende Spalte, die von Null verschiedene Werte enthält.*
2. *Ist der oberste Eintrag der gefundenen Spalte eine Null, vertausche die oberste Zeile mit einer geeigneten anderen Zeile.*
3. *Ist der in 1. gefundene Eintrag a, so dividiere die erste Zeile durch a und erzeuge somit eine führende Eins.*

4. Addiere passende Vielfache der ersten Zeile auf die anderen Zeilen, um unterhalb der führenden Eins Nullen zu erzeugen.

5. Wende 1.-4. auf den Teil der Matrix an, den man durch streichen der ersten Zeile erhält. Wiederhole dieses Verfahren bis die erweiterte Koeffizientenmatrix Zeilenstufenform hat.

6. Mit der letzten nicht verschwindenden Zeile beginnend, addiere geeignete Vielfache dieser Zeile zu den darüber liegenden Zeilen, um über den führenden Einsen Nullen zu erzeugen.

Unter Umständen ist es günstiger, die erweiterte Koeffizientenmatrix nur auf Zeilenstufenform zu bringen (also auf Schritt 6 zu verzichten). Das so erhaltene LGS löst man durch **Rückwärtssubstitution**.

Algorithmus 2. *Schritt 1.-5. wie in Algorithmus 1.*

6. Löse das LGS durch Rückwärtssubstitution.

Beispiel 9. ***(Gauß-Algorithmus, eindeutige Lösung)***

$$\begin{aligned} x+y+2z&=9\\ 2x+4y-3z&=1\\ 3x+6y-5z&=0 \end{aligned} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9\\ 2 & 4 & -3 & 1\\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Addition von (-2) *mal der ersten Zeile zur zweiten:*

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 2 & -7 & -17\\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x+y+2z&=9\\ 2y-7z&=-17\\ 3x+6y-5z&=0 \end{aligned}$$

2. Addition von (-3) *mal der ersten Zeile zur dritten:*

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 2 & -7 & -17\\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x+y+2z&=9\\ 2y-7z&=-17\\ 3y-11z&=-27 \end{aligned}$$

3. Multiplikation der zweiten Zeile mit $(-\frac{1}{2})$*:*

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2}\\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x+y+2z&=9\\ y-\tfrac{7}{2}z&=-\tfrac{17}{2}\\ 3y-11z&=-27 \end{aligned}$$

4. Addition von (-3) *mal der zweiten Zeile zur dritten:*

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x+y+2z&=9\\ y-\tfrac{7}{2}z&=-\tfrac{17}{2}\\ -\tfrac{1}{2}z&=-\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

5. Multiplikation der dritten Zeile mit (-2)*:*

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x+y+2z&=9\\ y-\tfrac{7}{2}z&=-\tfrac{17}{2}\\ z&=3 \end{aligned}$$

6. Rückwärtssubstitution:

$$\begin{aligned} z &= 3 \\ \Rightarrow y - \frac{7}{2}z &= y - \frac{21}{2} = -\frac{17}{2} \\ \Leftrightarrow y &= 2 \\ \Rightarrow x + y + 2z &= x + 8 = 9 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

Diese Lösung ist eindeutig.

Beispiel 10. ***(Gauß-Jordan-Verfahren)*** *Betrachte wieder:*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Aus dem obigen Beispiel wissen wir, dass dieses LGS äquivalent ist zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Wende nun Schritt 6. aus dem Gauß-Jordan-Verfahren an:

1) Addiere das $\frac{7}{2}$-fache der dritten Zeile zur zweiten Zeile:

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Addiere das (-2)-fache der dritten Zeile zur ersten Zeile:

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3) Addiere das (-1)-fache der zweiten Zeile zur ersten Zeile:

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 1, y = 2, z = 3$$

Beispiel 11. ***(Gauß-Verfahren, keine Lösung)***

$$\begin{aligned} x &= 6 \\ x + y &= 0 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Wende das Gauß-Verfahren an:

1. *Addition der (-1)-fachen ersten Zeile auf die zweite Zeile:*

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *Addition der (-1)-fachen ersten Zeile auf die dritte Zeile:*

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

3. *Addition des (-2)-fachen der zweiten Zeile auf die dritte:*

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

4. *Multiplikation der dritten Zeile mit $\frac{1}{6}$:*

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 6, y = -6, 0x + 0y = 0 = 1$$

Widerspruch! Damit hat das LGS keine Lösung.

Beispiel 12. ***(Gauß-Verfahren, ∞-viele Lösungen)***

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x + 6y &= 12 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Addiere das (-3)-fache der ersten Zeile zur zweiten Zeile:

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 4 - 2y$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(4 - 2t, t) \,|t \in \mathbb{R}\}$$

Eine Matrix hat verschiedene Zeilenstufenformen, allerdings ist die reduzierte Zeilenstufenform für jede Matrix eindeutig.

3 Mehr über Matrizen

Die Menge aller reellen (m,n)-Matrizen wird mit

$$\mathbb{R}^{m\times n} = \{A | A = [a_{ij}], a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$$

bezeichnet.
Vertauscht man Zeilen mit Spalten einer reellen (m,n)-Matrix A, so erhält man die **transponierte** Matrix $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$. D.h.

$$A^T = [a_{ji}]$$
$$\Rightarrow (A^T)^T = A$$

z.B.:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Definition 1. *i) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (je n Zeilen und Spalten) heißt **quadratische** Matrix.*

*ii) Die Einträge $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ einer quadratischen Matrix $[a_{ij}] = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ liefern uns die **Hauptdiagonale der Matrix**.*

iii) Die Matrix

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

*heißt **Nullmatrix** (Aus dem Kontext heraus manchmal auch einfach **Null**).*

iv) Die Matrix

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

*heißt **(n-te) Einheitsmatrix**.*

*v) Eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$ heißt **Diagonalmatrix**. Wir schreiben auch $D = (d_{11}, ..., d_{rr})$ für $r = min(m,n)$. Ein Beispiel für $m > n$:*

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & d_{(r-1)(r-1)} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{rr} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

*vi) Eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **obere Dreiecksmatrix**, falls $u_{ij} = 0$ für $i > j$ gilt. U ist die Standardnotation (engl.: upper).*

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

vii) *Eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **untere Dreiecksmatrix**, falls $u_{ij} = 0$ für $i < j$ gilt. L ist die Standardnotation (engl.: lower).*

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & l_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

viii) *$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **symmetrisch**, wenn $A = A^T$ gilt.*

3.1 Operationen mit Matrizen

i) **Addition:** Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann ist

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Eigenschaften der Matrixaddition:

a) Kommutativität:

$$A + B = B + A$$

b) Assoziativität:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

c) $A + 0 = A$. 0 ist die einzige (m, n)-Matrix mit dieser Eigenschaft.

d) Für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existiert genau ein $D \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit:

$$A + D = 0$$

Man schreibt $D = -A$

e)

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

ii) **Skalare Multiplikation:** Sei $c \in \mathbb{R}$ und $[a_{ij}] = A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann gilt:

$$cA = [ca_{ij}]$$

Beispiel:

$$c = 2, A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow cA = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 18 & 14 \end{pmatrix}$$

Seien $r, s \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:. Eigenschaften der skalaren Multiplikation:

a) Assoziativität:

$$r(sA) = (rs)A$$

b) Distributivität:

$$(r + s)A = rA + sA$$

und

$$r(A + B) = rA + rB$$

c)
$$(rA)^T = r(A^T)$$

Seien $c_1, ..., c_r \in \mathbb{R}$ und $A_1, ..., A_r \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann heißt

$$c_1A_1 + ... + c_rA_r$$

Linearkombination von $A_1, ..., A_r$ **mit den Koeffizienten** $c_1, ..., c_r$.

iii) Matrix-Multiplikation:

Motivation 1. *In einem Produktionsprozess werden zur Herstellung von zwei Zwischenprodukten Z_1, Z_2 drei Rohstoffe R_1, R_2, R_3 benötigt. Aus Z_1, Z_2 entstehen dann drei Endprodukte E_1, E_2, E_3.*
Für Z_1 werden drei Einheiten R_1, vier Einheiten R_2 und eine Einheit R_3 benötigt. Für Z_2 werden drei Einheiten R_1, zwei Einheiten R_2 und vier Einheiten R_3 benötigt. Das bedeutet, man kann den Bedarf an Rohstoffen als LGS schreiben:

$$\begin{matrix} 3R_1 + 4R_2 + R_3 = Z_1 \\ 3R_1 + 2R_2 + 4R_4 = Z_2 \end{matrix} \rightsquigarrow B := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Analog erhält man für die Endprodukte folgenden Bedarf:

$$\begin{matrix} 3Z_1 + 2Z_2 = E_1 \\ 2Z_1 + Z_2 = E_2 \\ 3Z_1 + 3Z_2 = E_3 \end{matrix} \rightsquigarrow A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Das heißt, man kann den Rohstoffbedarf für die Endprodukte E_1, E_2, E_3 ermitteln. Es ergibt sich:

$$\begin{matrix} 3(3R_1 + 4R_2 + R_3) + 2(3R_1 + 2R_2 + 4R_4) = E_1 \\ 2(3R_1 + 4R_2 + R_3) + 3R_1 + 2R_2 + 4R_4 = E_2 \\ 3(3R_1 + 4R_2 + R_3) + 3(3R_1 + 2R_2 + 4R_4) = E_3 \end{matrix}$$

In Matrixschreibweise ergibt sich der Bedarf

$$\begin{pmatrix} \langle(3,2),(3,3)\rangle & \langle(3,2),(4,2)\rangle & \langle(3,2),(1,4)\rangle \\ \langle(2,1),(3,3)\rangle & \langle(2,1),(4,2)\rangle & \langle(2,1),(1,4)\rangle \\ \langle(3,3),(3,3)\rangle & \langle(3,3),(4,2)\rangle & \langle(3,3),(1,4)\rangle \end{pmatrix}$$

($\langle,\rangle$ ist hier wieder das Standardskalarprodukt). Man definiert diese Matrix als Matrizenprodukt von A mit B (schreibe: AB).

Allgemein ist das Matrizenprodukt AB einer (m, r)-Matrix A und einer (r, n)-Matrix B definiert. Dabei gilt

$$AB \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

$$AB := [\sum_{j=1}^{r} a_{ij}b_{jk}] = [c_{ik}].$$

Anschaulich entsteht c_{ik} als Skalarprodukt der i-ten Zeile von A und der k-ten Spalte von B.

ACHTUNG: Das Matrizenprodukt ist nur definiert, wenn die Spaltenzahl von A und die Zeilenzahl von B übereinstimmen.

Beispiel:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&6&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&1&4&3\\0&-1&3&1\\2&7&5&2\end{pmatrix}\Rightarrow AB=\begin{pmatrix}12&27&30&13\\8&-4&26&12\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 4}$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned}&A\in\mathbb{R}^{1\times r}\hat{=}\mathbb{R}, B\in\mathbb{R}^{r\times 1}\hat{=}\mathbb{R}\\&\Rightarrow AB\in\mathbb{R}^{1\times 1}\hat{=}\mathbb{R}\\&(a_1,...,a_r)\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_r\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{r}a_ib_i\end{aligned}$$

Das heißt, zerlegt man A in m $(1,r)$-Matrizen (Zeilenvektoren) und B in n $(r,1)$-Matrizen (Spaltenvektoren), so ergibt sich

$$AB=[a_ib_k]$$

$$AB=\begin{pmatrix}-&a_1&-\\&\vdots&\\-&a_m&-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|&&|\\b_1&\cdots&b_n\\|&&|\end{pmatrix}.$$

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation:

a) Assoziativität:

$$A(BC)=(AB)C$$

b) Distributivität:

$$(A+B)C=AC+BC$$

und

$$C(A+B)=CA+CB$$

c)

$$A(rB)=r(AB)=(rA)B, r\in\mathbb{R}$$

d) Ist $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, so gilt:

$$E_nA=AE_n=A$$

e)

$$(AB)^T=B^TA^T$$

Beispiel zu e):

$$\begin{aligned}&A:=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}, B:=\begin{pmatrix}1&-2\\3&2\end{pmatrix}\\&\Rightarrow(AB)^T=\left(\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\3&2\end{pmatrix}\right)^T=\begin{pmatrix}7&2\\21&6\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}7&21\\2&6\end{pmatrix}\\&\text{und } B^TA^T=\begin{pmatrix}1&3\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&21\\2&6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

4 Lösen quadratischer Systeme durch Matrixinvertierung

Die Matrixform eines Linearen Gleichungssystems:

Betrachte:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

Mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

lässt sich das LGS schreiben als:

$$Ax = b$$

Hierbei ist A wieder die Koeffizientenmatrix und b die rechte Seite.

4.1 Invertierung quadratischer Matrizen

Definition 2. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann heißt A **invertierbar**, wenn ein $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert, so dass gilt:*

$$AB = BA = E_n.$$

*B wird dann als **inverse Matrix von A** oder einfach als **Inverse** bezeichnet.*

Bemerkung: Damit $BA = AB$ definiert ist, müssen beide Matrizen quadratisch sein!

B hat die Eindeutigkeitseigenschaft. D.h. existieren B_1 und B_2 mit

$$AB_1 = B_1A = E_n$$

und

$$AB_2 = B_2A = E_n$$

dann gilt

$$B_1 = B_2.$$

Beweis. Betrachte

$$\begin{aligned} AB_1 &= E_n \\ \Rightarrow B_2 &= B_2E_n \\ &= B_2(AB_1) \\ &= (B_2A)B_1 \\ &= E_nB_1 \\ &= B_1. \end{aligned}$$

□

Wir schreiben B als A^{-1}.

Beispiel 13.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Falls $AA^{-1} = E_n$ gilt, so gilt auch $A^{-1}A = E_n$.

Satz 4. *Sei*

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

A ist genau dann invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$ ist und es gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Beweis. Betrachte

$$\begin{aligned} \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -bc + ad \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & 0 \\ 0 & \frac{-bc+ad}{ad-bc} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Erinnerung: Eine der Bedingungen für das Vorliegen eines lokalen Extremums einer Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

war

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} - \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \right)^2 \neq 0.$$

Diese Bedingung ist genau die Bedingung im Satz, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} \delta_{xx} f & \delta_{xy} f \\ \delta_{yx} f & \delta_{yy} f \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Die Bedingung ist das Analogon zur Bedingung $f''(x) > 0$ oder < 0 für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Satz 5. ***(Rechenregeln für invertierbare Matrzien)***

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Die Inverse von A ist invertierbar. Genauer gilt:

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

b) Sind A und B invertierbar, so ist AB invertierbar und es gilt (Jacke-Hemd-Regel):

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

c) Die Transponierte von A ist genau dann invertierbar, wenn A invertierbar ist. Es gilt:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Beweis. a) Es gilt

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n,$$

dass heißt, es existiert eine Matrix, die die Bedingung für die inverse Matrix von A^{-1} erfüllt, und diese ist A.

b) Es gilt:

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}E_nB = B^{-1}B = E_n$$

und

$$ABB^{-1}A^{-1} = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n.$$

Damit ist AB invertierbar mit Inverser $B^{-1}A^{-1}$.

c) Es gilt:

$$A^T(A^{-1})^T = (AA^{-1})^T = E_n^T = E_n$$

und

$$(A^{-1})^TA^T = (AA^{-1})^T = E_n^T = E_n.$$

$\Rightarrow A^T$ ist invertierbar und es gilt $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

□

Beispiel 14.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{7}{16} & -\frac{3}{16} \end{pmatrix}$$

und

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{7}{16} & -\frac{3}{16} \end{pmatrix}$$

4.2 Verbindung zur Lösbarkeit von LGS

Satz 6. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Dann hat das LGS*

$$Ax = b$$

für jedes $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ genau eine Lösung, nämlich

$$x = A^{-1}b$$

Korollar 1. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Dann hat das homogene LGS*

$$Ax = 0$$

nur die triviale Lösung.

Beweis. Sei $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Dann gilt:

$$A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = E_n b = b,$$

d.h. $(A^{-1}b)$ ist eine Lösung des LGS. Sei x eine andere Lösung, dann gilt:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \Leftrightarrow A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ \Leftrightarrow x &= A^{-1}b. \end{aligned}$$

□

Beispiel 15. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ *A ist invertierbar mit* $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow x = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}b_1 & \frac{1}{4}b_2 \\ -\frac{3}{2}b_1 & \frac{1}{8}b_2 \end{pmatrix}$$

ist die Eindeutige Lösung von $Ax = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

4.3 Berechnung von Inversen

Wie berechnet man Inverse? Wann ist eine Matrix invertierbar?

Für den Fall $n = 2$ hat der Satz auf Seite 17 die Antwort geliefert. Für $n \geq 3$ ist die Frage wesentlich komplizierter. Mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens kann man dies aber durchführen.

Die Inverse zu berechnen heißt, die Matrixgleichung

$$AX = E_n$$

nach X zu lösen. Es gilt:

$$AX = (Ax_1, ..., Ax_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für $X = (x_1, ..., x_n)\,, x_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. D.h. die Lösungen von

$$Ax_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergeben als Spalten A^{-1}. Falls die Lösungen nicht existieren, ist A nicht invertierbar.

Algorithmus 3. *1. Erstelle aus A und E_n die Blockmatrix*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Forme mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens die linke Blockmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform um.*

   Somit:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{array}\right),$$

   wobei die rechte Blockmatrix die Lösungsvektoren gibt.

Beispiel 16.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

1. *Addiere (-2)-mal die erste Zeile zur zweiten Zeile:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Addiere (-3)-mal die erste Zeile zur dritten Zeile:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *Halbiere die zweite Zeile:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & -11 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. *Addiere (-3)-mal die zweite Zeile zur dritten Zeile:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

5. *(-2)-fache die dritte Zeile:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

6. *Addiere das* $(\frac{7}{2})$*-fache der dritten Zeile zur zweiten Zeile:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

7. *Addiere das* (-2)*-fache der dritten Zeile zur ersten Zeile:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

8. *Addiere das (-1)-fache der zweiten Zeile zur ersten Zeile:*

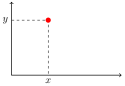
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -17 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

5 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

Die Punkte in der Ebene werden mithilfe von zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ beschrieben. D.h. die Ebene lässt sich mit der Menge der reellen Zahlenpaare (x, y) identifizieren. Man definiert:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$



5.1 Operationen auf dem $\mathbb{R}^2$

1. *Addition:*

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w).$$

Es gilt:

i) Parallelogramm-Regel:

$$(x, y) + (z, w) = (z, w) + (x, y).$$

ii) Assoziativität:

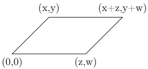
$$\big((x, y) + (z, w)\big) + (u, v) = (x, y) + \big((z, w) + (u, v)\big).$$

iii) Nullvektor:

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y).$$

iv) Negativer Vektor:

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$$



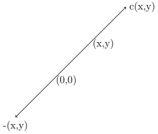
2. *Skalare Multiplikation:*
$$\forall c \in \mathbb{R} : c(x, y) = (cx, cy).$$

Es gilt:

i) Distributivität:
$$c\big((x, y) + (z, w)\big) = c(x, y) + c(z, w)$$
bzw.
$$(c + d)(x, y) = c(x, y) + d(x, y)$$

ii) Assoziativität:
$$c(d(x, y)) = (cd)(x, y)$$

iii)
$$1(x, y) = (x, y)$$



Mit diesen Eigenschaften wird $\mathbb{R}^2$ zu einem **reellen Vektorraum** (s. Kapitel 7). Die Menge der Punkte im Raum kann auf analoge Weise mit
$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$$
identifiziert werden. Es gelten die selben Rechenregeln wie für den $\mathbb{R}^2$. Es ist nun auch nicht mehr schwierig, den **n-dimensionalen Raum** zu definieren, nämlich
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\}$$
Es gelten die selben Rechenregeln wie oben, die Anschauung wie in der Fläche oder im Raum geht allerdings verloren.

Definition 3. ***Kartesisches Produkt:*** *Zu zwei Mengen A, B nennt man*
$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$
das ***Kartesische Produkt****.*

Beispiel 17.
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n-mal}$$

Das erklärt die Schreibweise $\mathbb{R}^n$ mit Exponent. Das Kartesische Produkt wird als Produkt verstanden, was in Kurzschreibweise mit Exponenten dargestellt werden kann.

Identifikation des $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^{n\times 1}$ bzw. $\mathbb{R}^{1\times n}$:

Die Räume der Spalten- bzw. Zeilenvektoren mit n Einträgen kann man mit den Vektoren im $\mathbb{R}^n$ identifizieren:

$$[x_1, ..., x_n] \in \mathbb{R}^{1\times n} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

wird identifiziert mit

$$(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung: Die Identifikation erhält Summen und skalare Multiplikation, vgl. Seite 13.

5.2 Das Skalarprodukt

Zu $x = (x_1, ..., x_n)$ und $y = (y_1, ..., y_n)$ definiere

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + ... + x_n y_n.$$

Die Operation $\cdot$ nennen wir **Skalarprodukt auf** $\mathbb{R}^n$. Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Es gilt:

i) Kommutativität:
$$x \cdot y = y \cdot x$$

ii) Distributivität:
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$
bzw.
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

iii)
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y)$$
und
$$x \cdot (\lambda y) = \lambda(x \cdot y)$$

iv)
$$x \cdot x \geq 0$$
und
$$x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = (0, ..., 0)$$

Beweis zu iv):

$$x \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Da zu $x_i \in \mathbb{R}$ gilt (s. letztes Semester):

$$x_i^2 \geq 0,$$

gilt somit

$$x \cdot x \geq 0$$

"⇒": Gilt

$$\begin{aligned} x \cdot x = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \\ &\Rightarrow x_i^2 = 0 \forall i = 1, ..., n, \end{aligned}$$

da sonst für ein i gilt: $x_i^2 > 0$ und somit: $x \cdot x > 0$.

"⇐"$x = (0, ..., 0) \Rightarrow x \cdot x = \sum_{i=1}^{n} 0^2 = 0$ □

Definition 4. ***Länge eines Vektors/Vektornorm:*** *Zu $x \in \mathbb{R}^n$ definiere*

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

Dies ist konsistent mit dem Betrag in $\mathbb{R}$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| = \sqrt{\lambda^2}.$$

Die Norm ist also eine Verallgemeinerung des Betrages von reellen Zahlen.
Mithilfe der Norm kann man den Abstand zweier Punkte $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^n$ definieren:

$$dist(P_1, P_2) := \|P_2 - P_1\|$$

Proposition 1. ***Satz des Pythagoras:***

Die Summe der Quadrate der Längen der Katheten eines rechtwinklingen Dreiecks entspricht dem Quadrat der Länge der Hypotenuse, also:

$$\|(x_1, 0)\|^2 + \|(0, x_2)\|^2 = \|(x_1, x_2)\|^2$$

Lemma 2. ***Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:***

$$|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|$$

Beweis: Betrachte für $n = 2$:

$$|x \cdot y| = |x_1 y_1 + x_2 y_2|$$
$$\|x\|\|y\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} |x \cdot y| &\leq \|x\|\|y\| \\ \Leftrightarrow |x \cdot y|^2 &\leq \|x\|^2\|y\|^2 \\ \Leftrightarrow (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 &\leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \\ \Leftrightarrow x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 &\leq x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 \\ \Leftrightarrow 2x_1 x_2 y_1 y_2 &\leq x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_2^2 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \end{aligned}$$

□

Lemma 3. ***Parallelogrammregel***

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2 &= x \cdot x + y \cdot y + (x-y) \cdot (x-y) \\ &= x \cdot x + y \cdot y - (x \cdot x + y \cdot y - 2x \cdot y) \\ &= 2x \cdot y \end{aligned}$$

□

5.3 Winkel zwischen Vektoren

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung von oben folgt aus $x \cdot y \neq 0$:

$$\frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|} \leq 1.$$

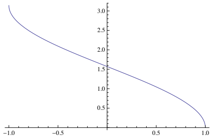
Definiere $\phi \in [0, \pi]$ durch:

$$\cos(\phi) := \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|} \Leftrightarrow \arccos(\frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}) = \phi$$

Da cos bijektiv auf $[0, \pi]$ mit Werten in $[-1, 1]$ ist, ist

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

auch definiert.



Damit gilt:

$$x \cdot y = \|x\|\|y\| \cos(\phi)$$

und

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos(\phi) \text{ (Kosinussatz)}$$

Eigenschaften der Norm

i) $\|x\| > 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii)

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$$

iii) Dreiecksungleichung:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

und damit:

$$|(\|x\| - \|y\|)| \leq \|x-y\|$$

Beweis zu iii):

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\Leftrightarrow x \cdot x + y \cdot y + 2x \cdot y = (x+y) \cdot (x+y) \leq (\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot y \leq 2\|x\|\|y\| \text{ Cauchy-Schwarzsche Ungleichung}$$

□

Definition 5. *x und $y \in \mathbb{R}^n$ heißen **orthogonal** genau dann, wenn $x \cdot y = 0$, d.h.*

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}$$

Beispielsweise sind $(0,1,0)$ und $(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ orthogonal.

5.4 Orthogonale Projektion

Seien $x, a \in \mathbb{R}^n$ mit $a \neq 0$. Der Vektor

$$\frac{x \cdot a}{\|a\|^2} a =: \mathbf{Proj}_a(x)$$

heißt **orthogonale Projektion von** x auf die Gerade mit Richtung a.

Der Vektor

$$x - \frac{x \cdot a}{\|a\|^2} a = x - \mathbf{Proj}_a(x)$$

heißt **orthogonale Projektion senkrecht zu a**.

Beispiel 18. *Seien $x = (2,-1,3), a = (4,-1,2)$. Dann ist*

$$\boldsymbol{Proj}_a(x) = \frac{15}{21}(4,-1,2).$$

Satz 7. *Es gilt für $x \neq 0$:*

$$\|\boldsymbol{Proj}_a(x)\| = \|x\||\cos(\phi)|,$$

wobei ϕ den Winkel zwischen x und a darstellt.

Beweis.

$$\|\mathbf{Proj}_a(x)\| = \|\frac{x \cdot a}{\|a\|^2} a\| = \frac{|x \cdot a|}{\|a\|^2}\|a\| = \frac{|x \cdot a|}{\|a\|} = \|x\||\cos(\phi)|$$

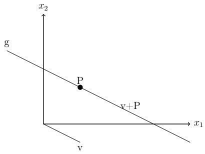
□

6 Analytische Geometrie von Geraden und Ebenen sowie reelle Vektorräume

6.1 Geraden

Eine Gerade $g \subseteq \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch einen Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ ("**Stützvektor**") und $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ ("**Richtungsvektor**"). Es gilt:

$$g := \{P + tv | t \in \mathbb{R}\}$$



Gleichungen der Form

$$x = P + tv$$

nennt man **Geradengleichung in Parameterform**.
Für $n = 2$, d.h. in der Ebene, kann jede Gerade auch äquivalent durch sog. "**Koordinatengleichungen**" beschrieben werden.

Satz 8. *Sei eine Gleichung*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + c = 0$$

mit $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ *gegeben. Dann ist die Lösungsmenge eine Gerade in* $\mathbb{R}^2$.

Umgekehrt lassen sich für alle Geraden $g \subseteq \mathbb{R}^2$ $(0, 0) \neq (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ *finden, s.d. gilt:*

$$g = \{(x_1, x_2) | a_1x_1 + a_2x_2 + c = 0\}.$$

Beweis. Sei eine Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + c = 0$ mit $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ gegeben.

1. Fall: $a_1 \neq 0$ (*2. Fall:* $a_2 \neq 0$ analog). Dann ist

$$P := \left(-\frac{c}{a_1}, 0\right)$$

eine Lösung. Setze

$$v := \left(-\frac{a_2}{a_1}, 1\right).$$

Setze $g := \{P + tv | \ t \in \mathbb{R}\}$. Wir zeigen nun, dass die Menge der Lösungen genau die Gerade g ist: Betrachte für $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a_1\left(-\frac{c}{a_1} - t\frac{a_2}{a_1}\right) + a_2t + c &= -c - ta_2 + ta_2 + c \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit sind alle Punkte auf der Geraden g Lösungen. Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + c &= 0 \\ \Leftrightarrow_{a_1 \neq 0} x_1 &= -\frac{c}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}x_2 \end{aligned}$$

Setze $x_2 := t$, Damit gilt $x_1 = -\frac{c}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}t$ und die Lösungsmenge ist gegeben durch

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(-\frac{c}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}t, t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = g.$$

Sei nun eine Gerade $g = \{(P_1, P_2) + t(v_1, v_2) | t \in \mathbb{R}\}$ gegeben. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Lösungsmenge der Gleichung

$$v_2x_1 - v_1x_1 - v_2P_1 + v_1P_2 = 0$$

die Gerade g ist. Durch Einsetzen sieht man sofort, dass jeder Punkt in g eine Lösung der Gleichung ist. Wir im ersten Teil gezeigt haben, dass die Lösung einer solchen Gleichung eine Gerade ist. Damit ist g Teilmenge einer Geraden g'. Dann muss aber $g' = g$ sein. Damit ist g die Lösungsmenge der Gleichung $v_2x_1 - v_1x_1 - v_2P_1 + v_1P_2 = 0$. □

Beispiel 19. *Die Gerade durch die Punkte $P := (0, 1)$ und $Q := (2, 0)$ hat die Geradengleichung*

$$x_1 + 2x_2 - 2 = 0$$

Die Gerade durch P und Q ist gegeben durch

$$\{P + t(2, -1) | t \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(2t, 1 - t)\}$$

Damit gilt:

$$2t + 2(1 - t) - 2 = 0$$

Nach obigen Satz ist g genau die Lösungsmenge dieser Gleichung.

Beispiel 20. *Bestimmung der Geradengleichung aus der Parameterdarstellung.*

Gegeben sei

$$g := \{(4, 0) + t(2, 1) | t \in \mathbb{R}\}$$

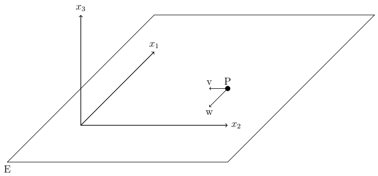
Bestimme eine Gleichung, deren Lösungsmenge genau g ist. Schreibe dazu:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - 2t \\ x_2 &= t \\ \rightsquigarrow x_1 &= 4 - 2x_2 \\ \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

6.2 Ebenen

Eine Ebene E im $\mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch einen "**Stützvektor**"$P \in \mathbb{R}^3$ und zwei(!) Richtungsvektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ mit v, w nicht parallel, d.h. es existiert kein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$v = \lambda w \text{ oder } w = \lambda v.$$



$$x = P + sv + tw, \text{ mit } s, t \in \mathbb{R}$$

heißt **Ebenengleichung in Parameterform**.

Drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ legen eine eindeutige Ebene fest, wenn $C - A$ und $B - A$ nicht parallel sind. Denn für

$$\begin{aligned} P &= A \\ v &= B - A \\ w &= C - A \end{aligned}$$

gilt:

$$v, w \text{ sind nicht parallel und } A, B, C \in \{P + sv + tw | s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Beispiel 21.

$$A := (1, -1, 1), B := \left(\frac{3}{2}, 1, 0\right), C := (0, 1, 1)$$

$$\Rightarrow E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Satz 9. *Eine Gleichung*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + c = 0$$

mit

$$(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$$

bestimmt eine Ebene eindeutig mit ihrer Lösungsmenge. Zu jeder Ebene existiert eine solche ***Ebenengleichung in Koordinatenform****.*

Beweis. 1. Fall: $a_1 \neq 0$. (Andere Fälle analog!)

Es gilt:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = -\frac{c}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} x_2 - \frac{a_3}{a_1} x_3. \end{aligned}$$

Setze $x_2 = s$ und $x_3 = t$ (Rückwärtssubstitution!)

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{c}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} s - \frac{a_3}{a_1} t$$

und die Lösungsmenge ist gegeben durch:

$$\mathbb{L} = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{c}{a_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}}_{Ebene}$$

Sei nun eine Ebene

$$E = \{P + sv + tw | s, t \in \mathbb{R}\}$$

gegeben. Bestimme eine Lösung des Gleichungssystems ($v = (v_1, v_2, v_3)^T, w = (w_1, w_2, w_3)^T$):

$$\begin{aligned} v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 &= 0 \\ w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Bringt man das System auf Zeilenstufenform, so sieht man sofort, dass eine Lösung $0 \neq n \in \mathbb{R}^3$ existiert. Dann folgt, dass die Gleichung

$$x \cdot n - P \cdot n = 0$$

die Ebene E eindeutig bestimmt. □

Beispiel 22. *Die Ebene durch die Punkte*

$$A = (1,1,0), B = (1,0,1), C = (0,1,1)$$

wird durch die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0$$

eindeutig beschrieben. Es gilt:

$$\begin{aligned} B - A = (0,-1,1) \ &\textit{und}\ C - A = (-1,0,1) \\ \rightsquigarrow -n_2 + n_3 &= 0 \\ -n_1 + n_3 &= 0 \end{aligned}$$

Setze $n_3 = 1 \Rightarrow n_1 = n_2 = 1$ *und betrachte*

$$(1,1,1) \cdot A = 2.$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 - 2 = x \cdot n - A \cdot n = 0.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung.

$n \in \mathbb{R}^3$ wie oben nennt man den **Normalenvektor** der Ebene E.

Satz 10. *Eine Ebene mit Stützvektor* P *und Normalenvektor* n *wird beschrieben durch die Gleichung*

$$(x - P) \cdot n = 0.$$

Umgekehrt lässt sich jede Ebene im $\mathbb{R}^3$ *durch eine solche Gleichung beschreiben.*

Beispiel 23. *1. Die Ebene durch* $P = (4,1,3)$ *mit Normale* $n = (2,-1,5)$ *ist gegeben durch*

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 - 22 = 0.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= (x - P) \cdot n \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - 4 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 - 4)2 + (x_2 - 1)(-1) + (x_3 - 3)5 \\ &= 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 22 \end{aligned}$$

2. *Eine Normalenform $(x-P)\cdot n = 0$ für die Ebene*

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 12 = 0$$

ist

$$\left(x - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Beachte: Die Normalenform ist **nicht** eindeutig während die Ebenengleichung eindeutig bis auf Vielfache ist. Das bedeutet die Gleichungen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + c_1 = 0$$

und

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c_2 = 0$$

beschreiben die selbe Ebene genau dann, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, so dass gilt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

und

$$c_1 = \lambda c_2.$$

Satz 11. *Ist*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + c = 0$$

eine Ebenengleichung, so ist der Vektor (a_1, a_2, a_3) ein Normalenvektor an diese Ebene.

Beachte: Ein Normalenvektor an eine Ebene E mit Richtungsvektoren v, w ist das Vektorprodukt $v \times w$ der Richtungsvektoren im $\mathbb{R}^3$.

7 Reelle Vektorräume und Untervektorräume

7.1 Reelle Vektorräume

Um adäquat formulieren zu können, welche Struktur die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems hat, müssen wir den Begriff des **Vektorraumes** einführen. Ein Beispiel sind die bereits bekannten Vektorräume $\mathbb{R}^n, n \geq 0$.

Beispiel 24. *1. Betrachte ein homogenes lineares Gleichungssystem*

$$Ax = 0.$$

Sind x, y Lösungen dieses Gleichungssystems, so sind auch $x + y$, λx sowie λy für $\lambda \in \mathbb{R}$ Lösungen. Damit lässt die Lösungsmenge Vektoraddition und skalare Multiplikation zu.

$\rightsquigarrow$ *Man könnte die Lösungsmenge als Vektorraum wie $\mathbb{R}^n$ bezeichnen.*

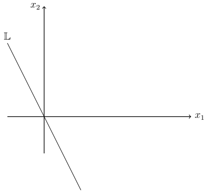
*2. **(Geometrisch):** Gegeben sei das lineare Gleichungssystem*

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 0$$

Setze

$$x_2 = t \Rightarrow x_1 = -2t.$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R}\}$$



Es gilt:

$$\begin{pmatrix} -2s \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(s+t) \\ s+t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \textit{Vektoraddition}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(\lambda t) \\ \lambda t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \textit{skalare Multiplikation}$$

Die dabei gezeigten Eigenschaften zur Vektoraddition und skalaren Multiplikation werden nun zur Definition erhoben:

Definition 6. *Ein* ***(reeller) Vektorraum*** $(V, \oplus, \odot)$ *ist eine Menge* V *zusammen mit zwei Abbildungen*

$$\oplus : V \times V \to V, (x, y) \mapsto x \oplus y$$

("Vektoraddition") und

$$\odot : \mathbb{R} \times V \to V, (\lambda, x) \mapsto \lambda \odot x$$

(SSkalare Multiplikation"), so dass folgende Eigenschaften gelten:

a) Kommutativität:

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

b) Assoziativität:

$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z.$$

c) Existenz des Nullvektors: Es existiert genau ein $0 \in V$*, so dass gilt:*

$$x \oplus 0 = x \text{ für alle } x \in V.$$

d) Existenz des negativen Vektors: Für alle $x \in V$ *existiert genau ein* $y \in V$*, sodass gilt:*

$$x \oplus y = 0.$$

Wir bezeichnen dieses y *mit* $-x$*.*

e) Distributivgesetze:

i)

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y).$$

ii)

$$(\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x).$$

f) Assoziativität:

$$\lambda \odot (\mu \odot x) = (\lambda\mu) odot x.$$

g)

$$1 \odot x = x.$$

In der Arbeit mit Vektorräumen werden $\oplus$ und $\odot$ wieder durch die bekannten $+$ und $\cdot$ ersetzt. In dieser Definition wird die Absetzung gemacht, um die Abstraktion von den bekannten Vektorräumen $\mathbb{R}^n$ hervorzuheben. Für das Eingangsbeipiel auf Seite 32 haben wir damit folgenden Satz:

Satz 12. *Die Lösungsmenge* $\mathbb{L}_A$ *eines homogenen linearen Gleichungssystems*

$$Ax = 0$$

ist ein Vektorraum.

Beweis: Wir wissen, dass $\mathbb{L}_A \subset \mathbb{R}^n$ gilt. Für $x, y \in \mathbb{L}_A$ ist somit $x + y \in \mathbb{R}^n$ definiert. Weiterhin wissen wir, dass gilt:

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x + y \in \mathbb{L}_A.$$

Genau so mit λx für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{L}_A$. Da die Vektoraddition und die skalare Multiplikation im $\mathbb{R}^n$ die Eigenschaften a), b) und e) bis g) erfüllt, reicht es zu zeigen, dass $0 \in \mathbb{L}_A$ und $x \in \mathbb{L}_A \Rightarrow -x \in \mathbb{L}_A$. Betrachte

$$A0 = 0 \Rightarrow 0 \in \mathbb{L}_A$$

und

$$A(-x) = -Ax = -0 = 0$$

Damit ist $\mathbb{L}_A$ ein Vektorraum. □

Vektorräume, die Teil eines größeren Vektorraumes sind, werden wir später als **Untervektorräume** bezeichnen. Im folgenden Satz betrachten wir nun allgemeine Eigenschaften von Vektorräumen:

Satz 13. *Sei V ein Vektorraum, dann gilt:*

a) Es gilt:

$$0x = 0 \in V$$

b) Der Nullvektor ist eindeutig, dass heißt für zwei Vektoren $0_1, 0_2 \in V$ mit $0_1 + x = x = 0_2 + x$ für alle x aus V folgt, dass $0_1 = 0_2$.

c) Es gilt:

$$\lambda 0 = 0$$

d) Gilt

$$\lambda x = 0,$$

folgt

$$\lambda = 0 \vee x = 0$$

e) Für alle $x \in V$ gilt:

$$-x = (-1)x.$$

f) $-x$ ist eindeutig, das heißt für $-x_1, -x_2 \in V$ mit

$$-x_1 + x = 0 = -x_2 + x$$

gilt:

$$-x_1 = -x_2.$$

Beweis. a)

$$0x = (0+0)x = 0x + 0x \Rightarrow 0x = 0.$$

b)

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

c) wie a):

$$\lambda 0 = \lambda(0+0) = \lambda 0 + \lambda 0$$

d) Sei $\lambda x = 0$ und $\lambda \neq 0$ (für $\lambda = 0$ ist nichts mehr zu zeigen):

$$0 = \frac{1}{\lambda} 0 = \frac{1}{\lambda} \lambda x = 1x = x.$$

e)

$$x + (-1)x = (1 + (-1))x = (1-1)x = 0x = 0 \Rightarrow -x = (-1)x.$$

f)
$$-x_1 = -x_1 + 0 = -x_1 + (-x_2 + x) = (-x_1 + x) + (-x_2) = 0 + (-x_2) = -x_2$$

□

Beispiel 25. ***Einige Beispiele für Vektorräume:***

1. *Der Vektorraum der reellen $m \times n$-Matrizen, $m, n \in \mathbb{N}$. Es wurde bereits erklärt, wie man zwei $m \times n$-Matrizen A, B addiert und mit Skalaren multipliziert:*

$$A + B = (a_{ij})_{1 \geq i \geq n, 1 \geq j \geq m} + (b_{ij})_{1 \geq i \geq n, 1 \geq j \geq m} := (a_{ij} + b_{ij})_{1 \geq i \geq n, 1 \geq j \geq m}$$

$$\lambda A = \lambda (a_{ij})_{1 \geq i \geq n, 1 \geq j \geq m} = (\lambda a_{ij})_{1 \geq i \geq n, 1 \geq j \geq m}$$

Nullvektor ist die Nullmatrix $0 = (0)_{1 \geq i \geq n, 1 \geq j \geq m}$. Damit wird $\mathbb{R}^{m \times n}$ zu einem reellen Vektorraum.

2. a) *Der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für Mengen X, Y ist eine Funktion $f : X \to Y$ eine Teilmenge Γ_f des kartesischen Produkts $X \times Y$, so dass für alle $x \in X$ genau ein $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in \Gamma_f \Leftrightarrow f(x) = y$. Schreibe: $\boldsymbol{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$*

   Addition:

$$f, g \in \boldsymbol{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : (f + g)(x) = f(x) + g(x) \rightsquigarrow (f + g) \in \boldsymbol{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

   und skalare Multiplikation:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \rightsquigarrow \lambda f \in \boldsymbol{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

   Der negative Vektor ist dann jeweils $(-f)(x) = -f(x)$, der Nullvektor die Nullfunktion $0(x) = 0$. Somit wird $\boldsymbol{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ zum unendlichdimensionalen reellen Vektorraum.

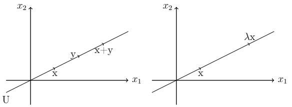
   b) *$C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq \boldsymbol{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge der stetigen reellen Funktionen. Vektoraddition und skalare Multiplikation überführt stetige Funktionen in stetige Funktionen. Außerdem ist die Nullfunktion (also der Nullvektor) stetig. Damit ist $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein Vektorraum.*

   c) *Genauso $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge der k-mal differenzierbaren reellen Funktionen.*

7.2 Untervektorräume von Vektorräumen

Definition 7. *Sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$. Dann heißt U **Untervektorraum von V**, falls U abgeschlossen unter der Vektoraddition und der skalaren Multiplikation ist, das heißt, für alle $x, y \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $x + y \in U$ und $\lambda x \in U$. Damit ist auch U selbst wieder ein Vektorraum.*

Beispiele sind Geraden und Ebenen, die den Ursprung $0 \in \mathbb{R}^n$ treffen.



Satz 14. *Sei V Vektorraum und $\emptyset \neq U \subseteq V$. Dann ist U ein Untervektorraum genau dann, wenn gilt:*

a)
$$\forall x, y \in U : x + y \in U.$$

b)
$$\forall x \in U, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda x \in U.$$

Beispiel 26. *Die Menge $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = x + y\}$ ist ein Untervektorraum, denn*

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in U \Leftrightarrow z_i = x_i + y_i$$

$$\Rightarrow z_1 + z + 2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$$

und

$$z = x + y \Leftrightarrow \lambda z = \lambda x + \lambda y \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \lambda(x, y, z) \in U$$

Mit dem obigen Satz ist U ein Untervektorraum. U ist auch die Lösungsmenge von $x + y = z$.

Unterräume von $\mathbb{R}^2$	Unterräume von $\mathbb{R}^3$
$\{0\}$	$\{0\}$
Geraden durch den Ursprung	Geraden durch den Ursprung
$\mathbb{R}^2$	Ebenen durch den Ursprung
	$\mathbb{R}^3$

8 Linearkombinationen und lineare Unabhängigkeit

Sei V ein reeller Vektorraum.

Definition 8. *Seien Vektoren $v_1,...,v_r \in V$ gegeben. $v \in V$ ist eine* ***Linearkombination*** *von $v_1, ..., v_r$, falls $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ existieren mit*

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r.$$

Die λ_i heißen ***Koeffizienten****.*

Beispiel 27. *$V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,0,2)$, $v_3 = (1,1,0)$. Dann ist $v = (2,1,5)$ eine Linearkombination von v_1, v_2, v_3. Denn für $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$ ist*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = v_1 + 2v_2 - v_3 = v.$$

Sei $M := \{v_1, ..., v_r\}$. Dann heißt

$$Lin(M) := \{v | v \text{ ist Linearkombination von } v_1, ..., v_r\}$$

die **Lineare Hülle von M**.

Beispiel 28.
1. *Sei $v \neq (0,0) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $Lin(\{v\})$ die Ursprungsgerade mit Richtung v in $\mathbb{R}^2$.*
2. *Für $v \neq (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ ist $Lin(\{v\})$ die Ursprungsgerade mit Richtung v im $\mathbb{R}^3$.*
3. *Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ mit v und $w \neq 0$ ist*
   - *i) $Lin(\{v, w\})$ die Ursprungsgerade mit Richtung v bzw. w genau dann, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $\lambda v = w$ gilt.*
   - *ii) $Lin(\{v, w\})$ ist die von v und w aufgespannte Ebene durch $0 \in \mathbb{R}^3$, falls $v \neq \lambda w$ und $\lambda v \neq w$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.*
4. *Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ so dass v und $w \neq 0$ sowie $v \neq \lambda w$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $Lin(\{v, w\}) = \mathbb{R}^2$, denn das LGS für (λ_1, λ_2)*
$$\lambda_1 v + \lambda_2 w = b$$
hat für alle $b \in \mathbb{R}^2$ (genau) eine Lösung.

Satz 15. *Sei $M := \{v_1, ..., v_r\}$. Dann ist $Lin(M)$ ein Untervektorraum von V.*

Beweis.
1. Der Nullvektor $0 \in V$ ist in $Lin(M)$, denn für $\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$ gilt:
$$0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_r = 0.$$
2. $v, w \in Lin(M) \Rightarrow v + w \in Lin(M)$:
$$v := \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r, w := \eta_1 v_1 + ... + \eta_r v_r$$
$$\Rightarrow v + w = (\lambda_1 + \eta_1)v_1 + ... + (\lambda_r + \eta_r)v_r.$$
3. $v \in Lin(m) \Rightarrow \lambda v \in Lin(M)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.
$$v := \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r \Rightarrow \lambda v = (\lambda\lambda_1)v_1 + ... + (\lambda\lambda_r)v_r \in Lin(M).$$

□

8.1 Spalten- und Zeilenraum einer Matrix

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann bildet die lineare Hülle aller Zeilenvektoren einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ und die lineare Hülle aller Spaltenvektoren einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^m$.

$$A = \begin{pmatrix} - & a_1 & - \\ & \vdots & \\ - & a_m & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnen $a_1, ..., a_m$ die Zeilenvektoren und $b_1, ..., b_n$ die Spaltenvektoren. Diese Räume heißen **Zeilenraum** bzw. **Spaltenraum** von A. Mit dem vorherigen Satz sehen wir sofort, dass folgender Satz gilt.

Satz 16. *Der Spaltenraum von A ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^m$. Der Zeilenraum von A ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.*

Beispiel 29. *Sei*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Der Spaltenraum $S(A)$ ist die Ursprungsebene, welche von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Der Zeilenraum ist $\mathbb{R}^2$, da $\mathbb{R}^2$ die lineare Hülle der Vektoren $(1, -1)$, $(2, 3)$ und $(4, 5)$ ist.

Sei U ein Untervektorraum von V. Dann wird U **von** $v_1, ..., v_r$ **erzeugt (oder aufgespannt)**, falls $U = Lin(\{v_1, ..., v_r\})$.

$\{v_1, ..., v_r\}$ heißt dann ein **Erzeugendensystem von U**.

Beispiel 30. *Die Vektoren $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$. Denn für $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ gilt:*

$$v = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1).$$

8.2 Die vier Fundamentalräume einer Matrix

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Den Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ der Lösungen der homogenen Gleichung

$$Ax = 0$$

nennt man den **Kern von A** und schreiben **ker(A)**.

Dann haben wir $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ folgende Untervektorräume zugeordnet:

1) Den Spaltenraum $S(A)$ in $\mathbb{R}^m$.

2) Den Zeilenraum $Z(A)$ in $\mathbb{R}^n$.

3) Den Kern von A in $\mathbb{R}^n$.

Für die transponierte Matrix $A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ können wir das wiederholen:

1^T) Den Spaltenraum $S(A^T)$ in $\mathbb{R}^n$.

2^T) Den Zeilenraum $Z(A^T)$ in $\mathbb{R}^m$.

3^T) Den Kern $\ker(A^T)$ in $\mathbb{R}^m$.

Dabei gilt:

$$S(A) = Z(A^T)$$

und

$$Z(A) = S(A^T),$$

da die Zeilen von A die Spalten von A^T sind und vice versa. Damit haben wir die **vier Fundamentalräume einer Matrix A**:

1. Den Spaltenraum $S(A)$ von $\mathbb{R}^m$.
2. Den Zeilenraum $Z(A)$ von $\mathbb{R}^n$.
3. Den Kern von A von $\mathbb{R}^n$.
4. Den Kern von A^T in $\mathbb{R}^m$.

8.3 Der Spaltenraum einer Matrix

Mithilfe des Spaltenraums können wir entscheiden, für welche $b \in \mathbb{R}^m$ das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

eine Lösung besitzt.

Satz 17. *Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ hat eine Lösung genau dann, wenn $b \in S(A)$, das heißt, die rechte Seite im Spaltenraum von A liegt.*

Beweis. Seien $a_1, ..., a_n$ die Spaltenvektoren von A, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dann ist $Ax = x_1 \cdot a_1 + ... + x_n \cdot a_n$. Damit ist $b = a_1 \cdot x_1 + ... + a_n \cdot x_n = Ax$ genau dann, wenn $b \in S(A)$. □

Beispiel 31.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>*Behauptung:*</u> $b \in S(A)$.

Mithilfe des Gauß-Verfahrens zeigt man, dass

$$Ax = b$$

die Lösung $x = (1, 2, 3)$ hat. Daher ist $b \in S(A)$ mit der Darstellung:

$$b = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

8.4 Lineare Unabhängigkeit

Problem: Sei $U \subseteq V$ von $v_1, ..., v_r$ erzeugt. Ist r die minimale Anzahl der Vektoren, die U erzeugen?

Beispiel 32. *Die Vektoren* $(1,0),(1,1),(1,2)$ *erzeugen* $\mathbb{R}^2$. *Allerdings erzeugen auch* $(1,0)$ *und* $(1,1)$ *bereits* $\mathbb{R}^2$. *Also ist für das Problem des erzeugten Untervektorraums der Vektor* $(1,2)$ *"unnötig". Es gilt:*

$$(1,2) = -(1,0) + 2(1,1)$$

oder

$$(0,0) = -(1,0) + 2(1,1) - (1,2).$$

Das heißt, die Gleichung

$$(0,0) = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(1,1) + \lambda_3(1,2)$$

hat nicht nur die triviale Lösung

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Definition 9. $v_1, ..., v_r \in V$ *heißen **(linear) unabhängig**, falls die Gleichung*

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r = 0$$

nur die triviale Lösung

$$\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$$

*besitzt. Existiert eine nicht-triviale Lösung, heißen die Vektoren **(linear) abhängig**.*

$\rightsquigarrow$ $(1,0),(1,1)$ und $(1,2)$ sind linear abhängig. Will man die lineare Unabhängigkeit von $v_1, ..., v_r$ untersuchen, so muss man die Lösungsmenge des LGS

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r = 0$$

bestimmen.

Satz 18.

1. *Seien* $v_1, ..., v_r \in V$. *Falls für ein* v_i *gilt, dass*

   $$v_i = 0,$$

   so sind $v_1, ..., v_r$ *linear abhängig.*

2. $v \in V$ *ist linear unabhängig genau dann, wenn* $v \neq 0$ *gilt.*

3. $v, w \in V$ *sind linear unabhängig genau dann, wenn*

   $$v \neq \lambda w$$

   bzw.

   $$\lambda v \neq w$$

   für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt. Damit spannen* v *und* w *genau dann eine Ebene auf, wenn sie linear unabhängig sind.*

Beweis.

1. Sei $v_i = 0$ für ein $i \in \{1, ..., r\}$. Dann gilt:

   $$0 = 0v_1 + ... + 0v_{i-1} + \lambda v_i + 0v_{i+1} + ... + 0v_r$$

   für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit hat das LGS unendlich viele nicht-triviale Lösungen.

2. Für nur einen Vektor $v \in V$ gilt:

$$v \text{ linear unabhängig } \Leftrightarrow (\lambda v = 0 \Rightarrow \lambda = 0).$$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\lambda v = 0 \Rightarrow_{\text{7. Vorlesung}} \lambda = 0 \vee v = 0$.

Das heißt, falls $v \neq 0$ folgt $\lambda = 0$ und damit ist v linear unabhängig. Mit 1. folgt dann: Ist $v = 0$, ist v linear abhängig.

3. v, w linear unabhängig impliziert mit 1., dass gilt: $v, w \neq 0$. Falls ein λ exisitiert mit $v = \lambda w$, dann gilt $v - \lambda w = 0$ und $\lambda \neq 0$, da $v \neq 0$. Damit wären aber v und w linear abhängig. Falls $w = \lambda v$ gilt die gleiche Argumentation.

$$v, w \text{ linear abhängig} \Rightarrow \exists (\lambda, \eta) \neq (0,0) \text{ mit } \lambda v + \eta w = 0 \rightsquigarrow v = -\frac{\eta}{\lambda} w \text{ oder } w = -\frac{\lambda}{\eta} v.$$

$\square$

9 Die Struktur der Lösungsmenge von $Ax = b$

9.1 Basis und Dimension

Definition 10. *$\{v_1, ..., v_r\} \subset V$ heißt **Basis von V**, falls $V = Lin(\{v_1, ..., v_r\})$ und die $v_1, ..., v_r$ linear unabhängig sind.*

Bemerkung:

i) Dieser Begriff beschreibt, dass ein Erzeugendensystem minimal ist.

ii) Beachte: Basen sind nie eindeutig.

Beispiel 33. *1. $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$, da v_1, v_2 linear unabhängig sind und $Lin(\{v_1, v_2\}) = \mathbb{R}^2$.*

2. $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ sind linear unabhängig und bilden eine Basis von $U = Lin(\{v_1, v_2\}) = \{v \in \mathbb{R}^3 | v = (a, b, 0), a, b \in \mathbb{R}\}$.

3. Ist V der Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich n, so bilden $v_i = x^i$, $i \in \{0, ..., n\}$ eine Basis von V.

Satz 19. *Ist $\{v_1, ..., v_r\}$ eine Basis von V, so kann jeder Vektor in V als eindeutige Linearkombination der $v_1, ..., v_r$ geschrieben werden.*

Beweis: Da $V = \mathrm{Lin}(\{v_1, ..., v_r\})$ folgt: Für jedes $v \in V$ existieren $\lambda_1, ..., \lambda_r$ mit

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r.$$

Existieren nun außerdem $\mu_1, ..., \mu_r$ mit

$$v = \mu_1 v_1 + ... + \mu_r v_r,$$

so folgt

$$0 = v - v = (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + ... + (\lambda_r - \mu_r)v_r.$$

Da $v_1, ..., v_r$ linear unabhängig sind, gilt

$$\lambda_1 - \mu_1 = ... = \lambda_r - \mu_r = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i = \mu_i, \forall i \in \{1, ..., r\}.$$

$\rightsquigarrow \lambda_1, ..., \lambda_r$ sind eindeutig. $\square$

Beispiel 34. *Die Vektoren $(1, 3)$ und $(-2, 2)$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.*

Nach der letzten Vorlesung sind $(1, 3)$ und $(-2, 2)$ linear unabhängig, da weder $(1, 3) = \lambda(-2, 2)$ noch $(-2, 2) = \lambda(1, 3)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Weiterhin hat das LGS

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

für jedes $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung.

$$\left(\lambda_1 = \frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{4}, \lambda_2 = -\frac{3b_1}{8} + \frac{b_2}{8}\right)$$

Satz 20. *Ist $\{v_1, ..., v_r\}$ eine Basis von V und $\{w_1, ..., w_l\}, w_i \in V$, $i \in \{1, ..., l\}$ linear unabhängig, so gilt:*
$$l \leq r$$
und
$$l = r$$
genau dann, wenn $\{w_1, ..., w_l\}$ Basis von V ist.

Bemerkung: Der Satz besagt insbesondere, dass jede endliche Basis eines reellen Vektorraums die gleiche Anzahl von Basisvektoren enthält.

Definition 11. *Besitzt ein reeller Vektorraum V eine endliche Basis $\{v_1, ..., v_r\}$, so heißt r* ***Dimension von V****.*

Bemerkung: Nicht jeder Vektorraum besitzt eine endliche Basis, z.B. $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Beispiel 35. 1. *$(1, 0), (0, 1), (1, 1)$ spannen $\mathbb{R}^2$ auf, sind aber keine Basis, da sie nicht linear unabhängig sind. Allgemein gilt:*

Satz (21)**.** Ist V r-dimensional, so ist jede Menge von n-vielen Vektoren linear abhängig, falls $n > r$.

2. *$\underbrace{(1, 0, ..., 0)}_{n}, ..., \underbrace{(0, ..., 0, 1)}_{n} \in \mathbb{R}^n$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Diese Basis enthält n-viele Vektoren, daher ist die Dimension von $\mathbb{R}^n = n$ ($\rightsquigarrow$ n-dimensionaler euklidischer Vektorraum). Allgemein gilt:*

Satz (22)**.** $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn sie die Spaltenvektoren einer invertierbaren Matrix sind.

Beweisskizze: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, d.h. A^{-1} existiert. Dann bilden die Spaltenvektoren $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Denn:
$$0 = Ax = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$$
hat nur eine triviale Lösung (A invertierbar).

$\Rightarrow \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig.

Weiterhin spannen $v_1, ..., v_n$ den $\mathbb{R}^n$ auf, da für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ und
$$x = A^{-1} b$$
gilt:
$$Ax = x_1 v_1 + ... + x_n v_n = b.$$
Sei $\{v_1, ..., v_n\}$ Basis von $\mathbb{R}^n$. Löse die n-vielen LGS:
$$Ax = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{i-ter Eintrag}, 0, ..., 0) =: e_i$$
mit
$$A = [v_1, ..., v_n] \text{ (Spalten } v_1, ..., v_n).$$
Bezeichne die Lösung mit $x_1, ..., x_n$. Definiere $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit den Spalten $x_1, ..., x_n$, dann gilt:
$$AB = [e_1, ..., e_n] = E_n.$$
Ein weiteres Argument zeigt $BA = E_n \Rightarrow B = A^{-1}$. Somit ist A invertierbar. □

9.2 Die Struktur der Lösungsmenge von Ax=b

Satz 23. *Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\bar{x}$ eine Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$ und $\{v_1, ..., v_r\}$ eine Basis des Kerns von A. Dann gilt: x ist genau dann eine Lösung von $Ax = b$, wenn $c_1, ..., c_r \in \mathbb{R}$ existieren mit $x = \bar{x} + c_1v_1 + ... + c_rv_r$.*

Beweis: i) Sei x eine Lösung von $Ax = b$. Zeige, dass $c_1, ..., c_r \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$x = \bar{x} + c_1v_1 + ... + c_rv_r.$$

Da $Ax = A\bar{x} = b \Rightarrow A(x - \bar{x}) = 0$. D.h. es existiert $c_1, ..., c_r \in \mathbb{R}$ mit

$$x - \bar{x} = c_1v_1 + ... + c_rv_r.$$

$$\Leftrightarrow x = \bar{x} + c_1v_1 + ... + c_rv_r.$$

ii) Jedes $\bar{x} + c_1v_1 + ... + c_rv_r$ löst $Ax = b$.

$$A(\bar{x} + c_1v_1 + ... + c_rv_r) = A\bar{x} + c_1 \underbrace{Av_1}_{=0} + ... + c_r \underbrace{Av_r}_{=0} = A\bar{x} = b$$

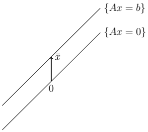
□

$\bar{x}$ heißt **spezielle Lösung**. Die Elemente der Menge $\{x | x \text{ löst } Ax = b\}$ heißen **allgemeine Lösungen**. D.h. eine allgemeine Lösung von $Ax = b$ ist die Summe aus einer speziellen Lösung und einer allgemeinen Lösung des homogenen Systems $Ax = 0$.

Bemerkung: Für LGS in zwei Variablen gilt: Der Kern ist entweder $\{0\}$, eine Ursprungsgerade oder $\mathbb{R}^2$.

Die allgemeinen Lösungen sind Verschiebungen der Lösungen von $Ax = 0$ um $\bar{x}$.

$\rightsquigarrow$ Die Lösungen von $Ax = b$ sind entweder $\{\bar{x}\}$, eine Gerade durch $\bar{x}$ oder $\mathbb{R}^2$.



Für LGS in drei Variablen ist die allgemeine Lösung damit entweder ein Punkt, eine Gerade, eine Ebene oder $\mathbb{R}^3$, je nachdem, was die Lösung der homogenen Gleichung ist.

Beispiel 36.

$$x_1 + 2x_2 = 4$$
$$3x_1 + 6x_2 = 12$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist

$$\{(-2t, t) | t \in \mathbb{R}\}.$$

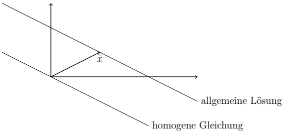
Eine Lösung der obigen Gleichung ist

$$\bar{x} = (2, 1)$$

Damit folgt:

$$\{\begin{pmatrix} 2-2t \\ 1+t \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R}\}$$

ist die allgemeine Lösung des gegebenen Systems.



Bemerkung: Der Satz besagt insbesondere, dass das inhomogene System genau dann eindeutig lösbar ist, wenn das homogene System eindeutig lösbar ist, also der Kern der Koeffizientenmatrix der Nullraum ist. Z.B.:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

hat für jede rechte Seite $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ genau eine Lösung, da

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \{0\}.$$

9.3 Zeilenbild einer Matrix

Wir hatten gesehen, dass $Ax = b$ genau dann eine Lösung besitzt, wenn $b \in S(A)$ (Spaltenbild von A).

Sei $A = \begin{pmatrix} - & z_1 & - \\ & \vdots & \\ - & z_m & - \end{pmatrix}$, also z_i die i-te Zeile von A und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Jede Gleichung

$$z_i \cdot x = b_i$$

bestimmt eine sogenannte **Hyperebene** in $\mathbb{R}^n$. Für $n = 3$ ist dies eine Ebene und für $n = 2$ ist dies eine Gerade (falls $z_i \neq 0$).

$\rightsquigarrow$ Das LGS $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn der Schnitt dieser m-vielen Hyperebenen nicht leer ist.

10 Konstruktion von Basen für die Fundamentalräume einer Matrix

10.1 Basen für die Fundamentalraäume einer Matrix

Die Fundamentalräume einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ waren definiert als:

1. $\ker(A) := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$.
2. $\ker(A^T) := \{y \in \mathbb{R}^m | A^T y = 0\}$.
3. $S(A)$ Spaltenraum von A.
4. $Z(A)$ Zeilenraum von A.

Bemerkung: Wenn wir einen Algorithmus zur Konstruktion von Basen für $\ker(A)$ und $Z(A)$ kennen, so können wir Basen für alle Fundamentalräume konstruieren. Das liegt daran, dass

$$S(A) = Z(A^T).$$

Wir wissen weiterhin, dass elementare Zeilenumformungen die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems nicht ändern. Das heißt insbesondere, dass der Kern von A invariant unter Zeilenumformungen ist. Dasselbe gilt für $Z(A)$, da jede elementare Zeilenumformung die Zeilen einer Matrix (ein Erzeugendensystem von $Z(A)$) in ein anderes Erzeugendensystem von $Z(A)$ überführt.
Denn seien $v_1, ..., v_m$ die Zeilen von A und $w \in Z(A)$, dass heißt es existieren $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

$$w = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m.$$

1. Vertauscht man v_i mit v_j, so gilt für

   $$\bar{v}_k := \begin{cases} v_k, \text{ wenn } k \neq i, j \\ v_i, \text{ wenn } k = j \\ v_j, \text{ wenn } k = i, \end{cases}$$

   dass $\bar{v}_1, ..., \bar{v}_m$ weiterhin $Z(A)$ erzeugen. Es gilt

   $$w = \bar{\lambda}_1 \bar{v}_1 + ... + \bar{\lambda}_m \bar{v}_m$$

   mit

   $$\bar{\lambda}_k := \begin{cases} \lambda_k, \text{ wenn } k \neq i, j \\ \lambda_i, \text{ wenn } k = j \\ \lambda_j, \text{ wenn } k = i. \end{cases}$$

2. Ersetzt man v_i durch ηv_i für $\eta \neq 0$, so gilt:

   $$w = \lambda_1 v_1 + ... + \frac{\lambda_i}{\eta} \eta v_i + ... + \lambda_m v_m,$$

   dass heißt, $v_1, ..., \eta v_i, ..., v_m$ erzeugt $Z(A)$.

3. Ersetze v_j durch $v_j + \eta v_i$ für $\eta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

   $$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_j (v_j + \eta v_i) + ... + (\lambda_i - \eta) v_i + ... + \lambda_m v_m.$$

   Das heißt, $v_1, ..., (v_j + \eta v_i), ..., v_m$ erzeugen $Z(A)$.

Dies sind die elementaren Zeilenumformungen ausgedrückt für die Zeilenvektoren. Damit haben wir folgenden Satz gezeigt:

Satz 24. *Elementare Zeilenumformung ändern den Kern und den Zeilenraum einer Matrix nicht. Entsteht Z durch A durch elementare Zeilenumformung, so gilt:*

$$ker(Z) = ker(A)$$

und

$$Z(A) = Z(Z).$$

Mithilfe der Zeilenstufenform können wir Basen zu $\ker(A)$ und $Z(A)$ konstruieren.

10.2 Konstruktion einer Basis für $Z(A)$

Satz 25. *Sei Z eine Matrix in Zeilenstufenform. Dann bilden alle von 0 verschiedenen Zeilenvektoren eine Basis von $Z(Z)$.*

Beweis: Sei Z in Zeilenstufenform. Das heißt insbesondere der einzige von Null verschiedene Eintrag in der ersten Spalte ist 1 in der ersten Zeile. Das heißt der einzige Zeilenvektor mit einem Eintrag ungleich 0 an erster Stelle ist der erste Zeilenvektor v_1. Sei nun

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 \cdot 1 + 0 + ... + 0 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 0 \end{aligned}$$

Streiche die erste Zeile und die erste Spalte und wiederhole das Argument. Es folgt:

$$\lambda_1 = ... = \lambda_m = 0.$$

$$\Rightarrow v_1, ..., v_m \text{ linear unabhängig.}$$

Da Lin($\{v_1, ..., v_m\}$)=$Z(Z)$ per Definition gilt, bilden die Zeilenvektoren eine Basis des Zeilenraums. □

Beispiel 37. *Sei*

$$Z := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach dem obigen Satz bilden somit $(1, 2, 4, 0, 1)$, $(0, 1, 2, 0, 0)$ und $(0, 0, 0, 1, 0)$ eine Basis von $Z(Z)$.

Für eine allgemeine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gehen wir also wie folgt vor:

1) Bestimme die Zeilenstufenform Z von A.

2) Die Zeilen von Z bilden eine Basis von $Z(A)$.

Beispiel 38.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat eine Zeilenstufenform

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit bilden $(1, 0, 2, 0, 1)$, $(0, 1, 2, 0, -1)$ und $(0, 0, 0, 1, 2)$ eine Basis von $Z(A)$.

10.3 Konstruktion einer Basis von ker(A)

Wir gehen ähnlich wie im Fall des Zeilenraumes vor. Zunächst bestimmen wir eine reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix A. Seien $x_{i_1},...,x_{i_r}$ die führenden Variablen von Z ($i_1 < ... < i_r$). Bezeichne mit $x_{j_1},...,x_{j_l}$ die restlichen (freien) Variablen (zum Beispiel

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dann sind $i_1 = 1$, $i_2 = 2$ und $j_1 = 3$).

Das lineare Gleichungssystem $Z \cdot x = 0$ ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} x_{i_1} &= \lambda_{i_1 j_1} x_{j_1} + ... + \lambda_{i_1 j_l} x_{j_l} \\ &\vdots \\ x_{i_r} &= \lambda_{i_r j_1} x_{j_1} + ... + \lambda_{i_r j_l} x_{j_l} \end{aligned}$$

Eine Basis von ker(A) besteht aus den Vektoren $v_1,...,v_l$, wobei v_k die Eins an der j_k-ten Stelle hat, $\lambda_{i_1 j_k},...,\lambda_{i_r j_k}$ an den i_1-ten bis i_r-ten Stellen und sonst Nullen. Da an den j_k-ten Stellen genau dann eine Eins steht, wenn $v = v_k$ gilt, sind die $v_1,...,v_l$ linear unabhängig.

Beispiel 39.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_5 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_5 &= 0 \\ x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned} \rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 &= -2x_3 - x_5 \\ x_2 &= -3x_3 + x_5 \\ x_4 &= -2x_5 \end{aligned} \rightsquigarrow \begin{aligned} i_1 = 1, j_1 &= 3 \\ i_2 = 2, j_2 &= 5 \\ i_3 &= 4 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow v_1 = (-2,-2,1,0,0)$ *und* $v_2 = (-1,1,0,-2,1)$ *bilden eine Basis von ker(A).*

10.4 Basis von allgemeinen Unterräumen

Wir können die obige Methode auch verwenden, um eine Basis einer linearen Hülle von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ zu bestimmen. Seien $v_1,...,v_r$ gegeben und $U =$Lin$(\{v_1,...,v_r\})$.

Fasse die Vektoren als Zeilen einer Matrix A zusammen. Anschließend bringe A auf Zeilenstufenform und lese eine Basis des Zeilenraums Z(A) ab. Diese Basis ist eine Basis von U, da $U = Z(A)$.

Beispiel 40. *Seien* $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$ *und* $v_3 = (1,2)$ *(*$\Rightarrow U = \mathbb{R}^2$*).*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Basis $(1,0)$, $(0,1)$.

10.5 Die Dimension der vier Fundamentalräume

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und Z eine Zeilenstufenform von A. Wir wissen bereits, dass Z(A)=Z(Z) und ker(A)=ker(Z) gilt. Damit gilt insbesondere dim(Z(A))=dim(Z(Z)) und dim(ker(A))=dim(ker(Z)) (lies: dim(U)= Dimension von U.)

Im Allgemeinen gilt aber S(A)$\neq$S(Z). Wir wollen zeigen, dass aber zumindest gilt:

$$dim(S(A)) = dim(S(Z)).$$

Mit ker(A)=ker(Z) wissen wir, dass $Ax = 0$ genau dann eine nichttriviale Lösung hat wenn $Zx = 0$ eine nichttriviale Lösung hat.
Das gilt auch, wenn man anstelle von A eine Matrix $\tilde{A}$ betrachtet, deren Spaltenvektoren auch Spaltenvektoren von A sind ($\tilde{A}$ entsteht durch das Streichen einzelner Spalten von A). Eine Zeilenstufenform $\tilde{Z}$ von $\tilde{A}$ besteht dann aus den entsprechenden Spalten von Z. Streicht man zum Beispiel bei einer Matrix A alle Spalten bis auf die erste und die fünfte Spalte, so erhält man $\tilde{Z}$ auch aus der ersten und der fünften Spalte von Z. Das heißt, eine Menge aus den Spaltenvektoren von A ist genau dann linear unabhängig, wenn die entsprechende Menge aus Spaltenvektoren von Z linear unabhängig ist. Lineare Unabhängigkeit ist hier äquivalent zu: $\tilde{A}x = 0$ hat nur triviale Lösungen. Daraus folgt: Die Dimension des Spaltenraums von A entspricht der Dimension des Spaltenraums von Z.

$$dim(S(A)) = dim(S(Z)).$$

Weiterhin gilt aber auch:

$$dim(S(Z)) = dim(Z(Z)).$$

Wie wir gezeigt haben, dass die Zeilen von Z eine Basis bilden, können wir auch zeigen, dass die Spalten von Z, die eine führende Eins enthalten, eine Basis von S(Z) bilden.
Da die Anzahl der nicht verschwindenenden Zeilen von Z genau die Anzahl der führenden Variablen ist, folgt:

$$dim(S(Z)) = dim(Z(Z))$$

und damit auch

$$dim(S(A)) = dim(Z(A)).$$

Aus obigem Satz wissen wir, dass die Dimension des Kerns von A gleich der Anzahl der freien Variablen von $Z \cdot x = 0$ ist. Da die Anzahl der führenden Einsen gleich dim(Z(A))=dim(S(A)) ist, folgt

$$dim(S(A)) + dim(ker(A)) = n$$

(da jede Variable entweder frei oder gebunden ist). Die gleiche Überlegung gilt für A^T.

$\Rightarrow$ dim(Z(A))+dim(ker(A^T))=m.

Satz 26. *Der Zeilen- und Spaltenraum einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ haben die gleiche Dimension r. Der Kern der Matrix A hat die Dimension $n - r$ und der Kern von A^T die Dimension $m - r$.*

Fundamentalraum:	*Dimension:*
$S(A)$	r
$Z(A)$	r
$ker(A)$	n-r
$ker(A^T)$	m-r

Man bezeichnet r =dim(Z(A))=dim(S(A))=Rg(A) auch als ***Rang von*** *A.*

Satz 27. *Es gilt:*

$$Rg(A) = Rg(A^T)$$

für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Beweis: S(A)=Z(A^T). □

11 Orthogonalität

Erinnerung:

1. Skalarprodukt $\cdot$ auf $\mathbb{R}^n$ war für $x = (x_1, .., x_n), y = (y_1, .., y_n)$ definiert als

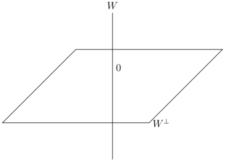
$$x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

2. Zwei Vektoren $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^n$ heißen **orthogonal**, falls gilt:

$$x \cdot y = 0$$

Definition 12. *Zwei Untervektorräume $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißen* ***orthogonal****, falls $x \cdot y = 0$ für alle $x \in U$ und alle $y \in V$ gilt.*
Für einen Untervektorraum $W \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnet $W^\perp$ das ***orthogonale Komplement von W****.*
Es gilt:

$$W^\perp := \{z \in \mathbb{R}^n | z \cdot x = 0 \forall x \in W\}.$$



Behauptung 1. *i) $W^\perp$ ist ein Untervektorraum. Mit $z_1, z_2 \in W^\perp \Rightarrow z_1 + z_2 \in W^\perp$, da für alle $x \in W$ gilt:*

$$(z_1 + z_2)x = z_1 x + z_2 x = 0,$$

und $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda z \in W^\perp$.

ii) dim W+dim $W^\perp = n$.

Sei $v_1, ..., v_n$ Basis von W.

$$\Rightarrow W^\perp = ker\ A$$

für $A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, da dim Z(A)=dim W

$$\Rightarrow dim\ W^\perp = n - dim\ W.$$

iii) $(W^\perp)^\perp = W$. Es gilt

$$W \subseteq (W^\perp)^\perp$$

und

$$dim\ W + dim\ W^\perp = n \Rightarrow W = (W^\perp)^\perp.$$

Satz 28. ***(Orthogonalität der Fundamentalräume)***
Sei $A \in \mathbb{R}^n$.

a) Der Kern von A und der Zeilenraum von A sind orthogonale Komplemente, d.h.

$$(ker\ A)^{\perp} = Z(A)(\Rightarrow (Z(A))^{\perp} = ker\ A).$$

b) Der Kern von A^T und der Spaltenraum von A sind orthogonale Komplemente, d.h.

$$(ker\ A^T)^{\perp} = S(A).$$

Beweis. b) folgt aus a) durch Betrachtung von A^T an Stelle von A.

Sei $x \in \ker A \Rightarrow Ax = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T x \\ \vdots \\ v_m^T x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
Da $v_1, ..., v_m$ Erzeugendensystem von Z(A) ist, folgt

$$x \in Z(A)^{\perp}.$$

Da dim(ker(A))+dim(Z(A))$= n$ gilt, folgt die Behauptung aus obiger Betrachtung. ☐

11.1 Orthogonale Projektionen

Aus früheren Vorlesungen ist bekannt, wie man einen Vektor x orthogonal auf eine Gerade mit Richtung $a \neq 0$ projeziert. Es gilt

$$\text{Proj}_a(x) = \frac{xa}{|a|^2} a.$$

Ziel ist es nun Gleichungen für orthogonale Projektionen zu definieren, bei denen das Ziel ein beliebiger Untervektorraum (nicht nur eine Gerade) ist.
Die Formel für $\text{Proj}_a(x) = \frac{xa}{|a|^2} a$ kann man als Matrizenprodukt schreiben:

$$\frac{xa}{|a|^2} a = a \frac{a^T x}{|a|^2} = \frac{aa^T}{|a|^2} x$$

Die Matrix $P := \frac{aa^T}{|a|^T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **orthogonale Projektionsmatrix auf den von a aufgespannten Untervektorraum Lin(a)**. Es gilt:

$$S(P) = \text{Lin}(a) \rightsquigarrow P_{S(A)} = P_{Lin(a)} = P.$$

Beispiel 41. *Sei $a = (1, 2, 2, 1) \Rightarrow |a|^2 = a^T a = 10$ und*

$$aa^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1, 2, 2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_{Lin(a)} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

i) P ist symmetrisch.

ii) $P^2 = PP = P$.

$$\frac{1}{100}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 10 & 20 & 20 & 10 \\ 20 & 40 & 40 & 20 \\ 20 & 40 & 40 & 20 \\ 10 & 20 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

Das heißt, zweimalige Anwendung von P bewirkt keine Änderung $\leadsto$ Die Vektoren im Ziel werden auf sich selbst projeziert.

Definition 13. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit*

i) $S(P) = U$

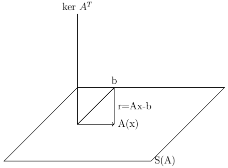
ii) $P^T = P$ (Symmetrie)

iii) $P^2 = P$ (Idempotenz)

*heißt **orthogonale Projektionsmatrix auf U**. Ist P eine orthogonale Projektionsmatrix auf U, so schreibt man $P = P_U$.*

11.2 Bedeutung für lineare Gleichungssysteme

Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem ohne Lösung, das heißt, es ergibt sich folgendes Bild:



Dieser Fall tritt typischerweise auf, wenn A mehr Zeilen als Spalten hat, was in Anwendungen häufig der Fall ist (mehr Parameter als Variablen).
Lösung hierfür ist die Bestimmung einer "Näherungslösung". Indem man b auf S(A) projeziert und eine Lösung für dieses System bestimmt. Dazu müssen wir für p die orthogonale Projektion von b auf S(A) Koeffizienten bestimmen, so dass $p = \bar{x}_1 v_1 + ... + \bar{x}_n v_n$ für die Spalten $v_1, ..., v_n$ von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Der **Fehlervektor** oder **Residuenvektor** $r = b - A\bar{x} \neq 0$ (s. Abbildung), da sonst $A\bar{x} = b$ eine Lösung hätte. Für $A\bar{x}$ gleich der orthogonalen Projektion von b auf S(A)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow r \perp S(A) \text{ (d.h. } rv_i = 0 \forall 1 \leq i \leq n) \\ &\Rightarrow r \in \ker A^T \\ &\Rightarrow 0 = A^T r = A^T(b - A\bar{x}) \\ &\Leftrightarrow A^T A\bar{x} = A^T b \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem heißt **Normalengleichungssystem (NGS)**.

Satz 29. *Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ hat $\bar{x}$ als Näherungslösung, wenn $\bar{x}$ dem Normalengleichungssystem*

$$A^T Ax = A^T b$$

genügt. Die Matrix $A^T A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn die Spaltenvektoren v_i von A linear unabhängig sind. Dann ist $\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$ die eindeutige Lösung.
Die orthogonale Projektion p von b auf $S(A)$ ist:

$$p = A\bar{x} = A(A^T A)^{-1} A^T b,$$

d.h. $P_{S(A)} = A(A^T A)^{-1} A^T$

Beispiel 42.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, A^T b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \textit{NGS:} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$p = A(A^T A)^{-1} A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{S(A)} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

11.3 Orthogonal- und Orthonormalbasen

Eine Menge von Vektoren $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ hei"t **orthogonal**, falls $v_i \neq 0$ und $v_i \cdot v_j = 0$ für alle $i \neq j$ gilt. Gilt außerdem $|v_i| = 1$ für alle i, so heißt die Menge **orthonormal**.

Beispiel 43.
1. *Die Menge $\{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$ ist orthogonal, aber nicht orthonormal.*

   Für $v \neq 0$ hat $\frac{v}{|v|}$ die Länge 1 ($|\frac{v}{|v|}| = \frac{|v|}{|v|} = 1$).

2. *Die Menge $\{(0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)\}$*

Eine Basis von $\mathbb{R}^n$, die orthogonal ist, heißt **Orthogonalbasis**. Ist sie außerdem orthonormal, so heißt sie **Orthonormalbasis**.

Beispiel 44. *Die Vektoren $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ bilden eine Orthonormalbasis.*

Satz 30. *Eine Menge von orthogonalen Vektoren ist linear unabhängig.*

Beweis. Sei $\{v_1, ..., v_k\}$ orthogonal und

$$c_1 v_1 + ... c_k v_k = 0$$

$$\Rightarrow (c_1 v_1 + ... c_k v_k) v_i = c_i v_i \cdot v_i = 0.$$

Da $v_i \neq 0$ gilt, folgt $v_i v_i \neq 0$ und somit $c_i = 0$.

Dies gilt für alle $i \in \{1, ..., k\}$. □

Wir betrachten nun die Koordinaten eines Vektors einer Orthonormalbasis.

Satz 31. *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine Orthonormalbasis von* $\mathbb{R}^n$. *Dann gilt für alle* $v \in \mathbb{R}^n$:

$$v = c_1v_1 + ... + c_nv_n \text{ für } c_i = v \cdot v_i.$$

Beweis. Da $\{v_1, ..., v_n\}$ Basis

$$\Rightarrow v = c_1v_1 + ... + c_nv_n \text{ für } c_i \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v \cdot v_i = (c_1v_1 + ... + c_nv_n)v_i = c_i.$$

□

Beispiel 45. *Die Vektoren* $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$ *und* $v_3 = (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$ *bilden eine Orthonormalbasis von* $\mathbb{R}^3$.

Der Vektor $v = (1, 1, 1)$ *hat die Koordinaten* $(v \cdot v_1, v \cdot v_2, v \cdot v_3) = (1, -1\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$ *bezüglich der Basis* $\{v_1, v_2, v_3\}$.

11.4 Gram-Schmidt-Verfahren

Frage: Wie bestimmt man eine Orthogonal- bzw. Orthonormalbasis?

Sei eine Basis $B = \{u_1, ..., u_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ gegeben.

Algorithmus 4. ***(Gram-Schmidt)***

1. *Setze* $v_1 = u_1$.
2. *Sei* $W_1 =$*Lin*(u_1). *Setze* $v_2 = u_2 - P_{W_1}u_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{|v_1|^2}v_1$.
3. *Sei* $W_2 =$*Lin*(v_1, v_2)=*Lin*(u_1, u_2). *Setze* $v_3 = u_3 - P_{W_3}u_3$.
4. *Fahre auf diese Weise fort bis* u_n.

Man erhält auf diese Weise eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 46.

$$u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1).$$

1. $v_1 = u_1 = (1, 1, 1)$.
2. $v_2 = u_2 - P_{W_1}u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
3. $v_3 = u_3 - P_{W_2}u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Algorithmus 5. ***(Gram-Schmidt 2)*** *Ersetze nach jedem Schritt* v_i *durch* $\frac{v_i}{|v_i|}$. *Damit erhält man aus einer beliebigen Basis eine Orthonormalbasis von* $\mathbb{R}^n$.

12 Determinanten

Bisher kennen wir nur ein Kriterium, um zu entscheiden, ob ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Lösung hat. Für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ wissen wir, dass A invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt. In der letzten Vorlesung haben wir gesehen, dass die Invertierbarkeit von Matrizen auch für lineare Gleichungssysteme mit nichtquadratischen Koeffizientenmatrizen eine Rolle spielt.
Die reelle Zahl $ad - bc$ nennt man die **Determinante** $det(A)$ von $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wir werden sehen, dass man Determinanten auch für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n > 2$ definieren kann und der Wert der Determinante darüber entscheidet, ob die Matrix invertierbar ist. Mit der Formel für die Inverse einer 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ folgt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{det(A)} & -\frac{b}{det(A)} \\ -\frac{c}{det(A)} & \frac{a}{det(A)} \end{pmatrix}.$$

Satz 32. *Für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt:*

a)

$$det(A) = det(A^T).$$

b) Vertauschen von Zeilen/Spalten ändert das Vorzeichen der Determinante.

c) Multiplizieren einer Zeile/Spalte von A mit $\lambda \in \mathbb{R}$ führt zu einer Multiplikation der Determinante von A mit λ.

d) Geht B aus A durch Addition eines Vielfachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen hervor, so gilt:

$$det(B) = det(A).$$

Beweis: a)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow det(A) = ad - bc = ad - cb = det(A^T).$$

b)

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \text{ (Vertausche zwei Zeilen)}$$
$$\Rightarrow det(\tilde{A}) = cb - ad = -(ad - bc) = -det(A).$$

Die Aussage für Spalten folgt mit a).

c)

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow det(\tilde{\tilde{A}} = (\lambda a)d - (\lambda b)c = \lambda(ad - bc) = \lambda det(A).$$

Die Aussage für Spalten folgt wieder aus a).

d)

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c + \lambda a & d + \lambda b \end{pmatrix} \Rightarrow det(B) = a(d + \lambda b) - b(c + \lambda a) = ad + a\lambda b - bc - b\lambda a = ad - bc.$$

Die Aussage für Spalten folgt wieder aus a).

□

Satz 33. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

i)
$$det(A) = 0.$$

ii) Zwei Zeilen von A sind linear abhängig.

iii) Zwei Spalten von A sind linear abhängig.

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $det(A) = 0$. D.h.$ad = bc$.

<u>Fall 1:</u> Falls $a \neq 0$, gilt: $d = \frac{c}{a}b$. D.h.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{c}{a}b \end{pmatrix}.$$

Für die untere Zeile von A gilt somit

$$(c, \frac{c}{a}b) = \frac{c}{a}(a, b).$$

D.h. die Zeilen von A sind linear abhängig.

<u>Fall 2-4:</u> $b \neq 0$ bis $d \neq 0$ folgen analog. <u>Fall 5:</u> $a = b = c = d = 0$ ist trivial, da eine Menge von Vektoren, die den Nullvektor enthält, immer linear abhängig ist.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, s.d.

$$(a, b) = \lambda(c, d) \Rightarrow \text{ die Spaltenvektoren sind } c\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } d\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder

$$(c, d) = \lambda(a, b) \Rightarrow \text{ die Spaltenvektoren sind } a\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \text{ und } b\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$: Gilt $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, so folgt:

$$det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = det\left(\begin{pmatrix} \lambda b & b \\ \lambda d & d \end{pmatrix}\right) = \lambda(bd - bd) = 0.$$

Gilt $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, so folgt:

$$det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \lambda(ac - ac) = 0.$$

□

Satz 34. *Für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt: $det(AB) = det(A)det(B)$. Insbesondere folgt hieraus $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} = det(A)^{-1}$.*

Beweis:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} ac + bg & af + bh \\ ce + gd & cf + dh \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow det(AB) &= (ae+bg)(cf+dh)-(af+bh)(ce+dg)\\ &= acef+adeh+bcgf+bdgh-acef-adgf-bceh-bdhg\\ &= (ad-bc)eh-(ad-bc)gf\\ &= (ad-bc)(eh-gf) = det(A)det(B).\end{aligned}$$

Es gilt: $AA^{-1} = E_n \Rightarrow det(AA^{-1}) = 1$.

$$\Rightarrow 1 = det(A)det(A^{-1}) \Rightarrow_{det(A)\neq 0} det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.$$

□

12.1 Determinanten für $n > 2$

Für $n = 3$ ist die Determinante von $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definiert als:

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{32}\\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\\ &= a_{11}det(A_{11}) + a_{12}det(A_{12}) + a_{13}det(A_{13})\end{aligned}$$

wobei $A_{1j} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ aus A durch streichen der ersten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

Definition 14. *i) Zu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiere A_{ij} als die Matrix, die durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.*

ii)

$$det(A) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}) \text{ (Entwicklung nach Streichung der i-ten Zeile.)}$$

Bemerkung: Diese Definition ist induktiv, dass heißt wenn man die Definition für n kennt, so kann man sie für $n+1$ konstruieren (s.o.).

Satz 35. *Die Determinante hängt nicht von der Zeile ab, nach der entwickelt wird. Es gilt außerdem:*

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij} \text{ (Entwicklung nach Streichung der j-ten Spalte.)}$$

Für praktische Anwendungen wird man immer eine Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Nullen heraussuchen, um danach zu entwickeln.

Beispiel 47.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Berechne $det(A)$ durch Entwicklung nach der zweiten Zeile.

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{2+j} a_{2j} det(A_{2j}) \\ &= (-1)^3 a_{21} det(A_{21}) + (-1)^4 a_2 2 det(A_{22}) + (-1)^5 a_{23} det(A_{23}) \\ &= -2det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} + 4det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} + (-3)det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Satz 36. ***(Rechenregeln für Determinanten)*** *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*

1. $$det(A) = det(A^T).$$

2. *Vertauschen von zwei Zeilen/Spalten von A ändert das Vorzeichen der Determinante.*

3. *Multiplizieren einer Zeile/Spalte mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert die Determinante mit λ.*

4. *Addieren eines Vielfachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen ändert die Determinante nicht.*

5. *$det(A) = 0$ genau dann, wenn zwei Zeilen von A linear abhängig sind genau dann, wenn zwei Spalten von A linear abhängig sind.*

6. *$det(AB) = det(A)det(B) \Rightarrow det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.*

Satz 37. *$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $det(A) \neq 0$ gilt.*

Folgerung: Ein quadratisches lineares Gleichungssystem $Ax = b$ ist für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ genau dann lösbar, wenn $det(A) \neq 0$ gilt. Anders ausgedrückt:

$Ax = 0$ hat eine nichttriviale Lösung $\Leftrightarrow det(A) = 0$ (Nur für quadratische LGS!)

Mithilfe der Determinante kann man auch die Inverse einer Matrix berechnen, sowie die Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ angeben.

Satz 38.

1. *Inverse: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $det(A) \neq 0$. Dann ist der Eintrag von A^{-1} in der i-ten Zeile und j-ten Spalte gegeben durch:*

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{det(A_{ji})}{det(A)}.$$

Man beachte die Vertauschung der Zeilen und Spalten in der Formel.

2. *Lösung für $Ax = b$: Das lineare Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 &= b_1 a_{22} - a_{12} b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 &= b_2 a_{11} - a_{21} b_1 \end{aligned}$$

Das heißt, für $A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$ ist die Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{det(A_1)}{det(A)} \\ \frac{det(A_2)}{det(A)} \end{pmatrix}$$

Satz 39. ***(Cramersche Regel)*** *Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $det(A) \neq 0$ hat die eindeutige Lösung:*

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, ..., x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)},$$

wobei A_j durch Ersetzung der j-ten Spalte von A durch b entsteht.

Beispiel 48.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

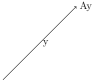
$$\Rightarrow x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = 1, x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} = 2, x_3 = \frac{det(A_3)}{det(A)} = 3.$$

13 Eigenwerte und Eigenvektoren

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ liegen x und Ax in $\mathbb{R}^n$, haben aber im Allgemeinen keine geometrische Beziehung zueinander.

In vielen Fällen existieren aber ein $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$Ay = \lambda y.$$



Fragen dieser Art treten zum Beispiel in der Physik (Schwingungen, Quantenmechanik), chemischen Reaktionen, Ökonomie und Geometrie auf.

Beachte: Da $A \cdot 0 = 0$ gilt, ist der Nullvektor immer eine Lösung des obigen Problems für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$. Diese Antwort gibt wenig Sinn und wird daher immer ausgeschlossen.

Definition 15. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $x \neq 0$ heißt **Eigenvektor von A zum Eigenwert** $\lambda \in \mathbb{R}$, falls $Ax = \lambda x$.*

Beispiel 49. *$x = (1,1)$ ist Eigenvektor von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda = 2$.*

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung:

i) Vektoren im Kern von A, d.h. $Ax = 0$ sind Eigenvektoren von A zum Eigenwert $0 \in \mathbb{R}$, da

$$Ax = 0 = 0 \cdot x.$$

ii) Geometrische Deutung: Ein Eigenvektor einer Matrix A wird durch Multiplikation mit A um den Eigenwert gestaucht oder gestreckt.

iii) Die Einheitsmatrix E_n hat nur den Eigenwert 1 und jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist Eigenvektor von E_n zum Eigenwert 1.

iv) Ist x Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, dann gilt:

$$A^2 x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x.$$

Allgemein folgt:

$$A^k x = \lambda^k x$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

13.1 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Zunächst beschreiben wir, wie man Eigenwerte bestimmt. Mithilfe des Eigenwertes lassen sich die Eigenvektoren ausrechnen. Die Gleichung

$$Ax = \lambda x$$

ist äquivalent zu

$$Ax = \lambda E_n x.$$

Diese ist wiederum äquivalent zu

$$(A - \lambda E_n)x = 0.$$

Das heißt: x ist Eigenvektor zum Eigenwert λ genau dann, wenn $x \in \ker(A - \lambda E_n)$.

Da wir voraussetzen, dass $x \neq 0$, heißt das, dass $\ker(A - \lambda E_n) \neq \{0\}$. Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass

$$\ker(A - \lambda E_n) \neq \{0\} \Leftrightarrow det(A - \lambda E_n) = 0.$$

Die Abbildung $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto det(A - \lambda E_n)$ ist ein Polynom vom Grad n und wird als **charakteristisches Polynom** bezeichnet. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt ein Polynom vom Grad n höchstens n-viele reelle Nullstellen. Das heißt eine $n \times n$-Matrix kann höchstens n verschiedene Eigenwerte besitzen.

Der nullte Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist $\det(A)$. Das heißt:

$$0 \in \mathbb{R} \text{ ist Eigenwert} \Leftrightarrow det(A) = 0 \Leftrightarrow ker(A) \neq \{0\}.$$

Beispiel 50. *Berechne die Eigenwerte von*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda E_n) =& det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4\lambda \end{pmatrix} \\ =& (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 \\ =& \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ =& (\lambda - 2)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Das heißt, 2 und 3 sind die Eigenwerte von A. Wie bestimmt man nun die Eigenvektoren von A?

Löse die linearen Gleichungssysteme

$$Ax = 2x \Leftrightarrow (A - 2E_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ -2 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{L} = \{(t,t) | t \in \mathbb{R}\}$$

und

$$
\begin{aligned}
Ax = 3x &\Leftrightarrow (A - 3E_2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-3 & 1 \\ -2 & 4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow 2x_1 = x_2 \\
&\rightsquigarrow \mathbb{L} = \{(t, 2t) | t \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}
$$

Allgemein lässt sich die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren durch folgenden Algorithmus beschreiben:

Algorithmus 6. *1. Bestimme alle reellen Nullstellen des charakteristischen Polynoms* $det(A - \lambda E_n)$*. Die Nullstellen sind die Eigenwerte von* A*.*

2. Bestimme alle Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E_n)x = 0$$

für λ *Eigenwert von* A*.*

Beispiel 51. *Bestimme alle Eigenwerte und Eigenvektoren von*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A *ist*

$$
\begin{aligned}
det(A - \lambda E_3) &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 \\
&= (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.
\end{aligned}
$$

Die Eigenwerte sind also 1 und 2.

Für $\lambda = 2$ *ergibt sich das lineare Gleichungssystem*

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\{(-t, s, t) | s, t \in \mathbb{R}\} = \{t(-1, 0, 1) + s(0, 1, 0) | s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Für $\lambda = 1$ *das Gleichungssystem:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\{t(-2, 1, 1) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Bemerkung: Da die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert λ von A vereinigt mit $\{0\}$ gleich dem Untervektorraum $\ker(A - \lambda E_n)$ ist, folgt, dass die Menge der Eigenvektoren zu einem(!) Eigenwert einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ bilden. Dieser Untervektorraum wird als **Eigenraum von A zum Eigenwert** λ bezeichnet.
Außerdem folgt, dass für $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte von A gilt, dass der Eigenraum von λ und der Eigenraum von μ nur den Nullvektor gemeinsam haben. Denn aus

$$Ax = \lambda x = \mu x$$

folgt

$$0 = (\lambda - \mu)x.$$

Da $\lambda \neq \mu \Rightarrow \lambda - \mu \neq 0 \Rightarrow x = 0$. Allgemein lässt sich das in folgendem Satz zusammenfassen:

Satz 40. *Seien $\lambda_1, ..., \lambda_r$ paarweise verschiedene Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x_1, ..., x_r$ Eigenvektoren zu den jeweiligen Eigenwerten. Dann sind die Vektoren linear unabhängig.*

Beweis: Wir müssen zeigen, dass die Linearkombination

$$c_1 x_1 + ... + c_r x_r = 0$$

impliziert, dass $c_1 = ... = c_r = 0$.

i) Multipliziere A mit $c_1 x_1 + ... + c_r x_r$.

$$\Rightarrow c_1 \lambda_1 x_1 + ... + c_r \lambda_r x_r = 0. (*)$$

ii) Multipliziere $c_1 x_1 + ... + c_r x_r$ mit λ_1

$$\Rightarrow c_1 \lambda_1 x_1 + ... + c_r \lambda_1 x_r = 0$$

und subtrahiere von $(*)$

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + ... + c_r(\lambda_r - \lambda_1)x_r = 0. (**)$$

Wiederhole mit $(**)$ die Schritte (i) und (ii)

$$\Rightarrow c_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)x_3 + ... + c_r(\lambda_r - \lambda_1)(\lambda_r - \lambda_2)x_r = 0.$$

$r - 1$-fache Wiederholung gibt uns:

$$c_r(\lambda_r - \lambda_1)(\lambda_r - \lambda_2)...(\lambda_r - \lambda_{r-1})x_r = 0.$$

Da $x_r \neq 0$ und $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i, j \in \{1, ..., r\}$ gilt, folgt $c_r = 0$.
Genauso zeigt man dann auch $c_1 = \ldots = c_{r-1} = 0$. Die lineare Unabhängigkeit folgt. □

13.2 Diagonalisierbarkeit einer Matrix

Mit dem Verständnis von Eigenewerten und Eigenvektoren stellt sich ganz natürlich die Frage: Wann existiert zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$, die nur aus Eigenvektoren von A besteht? Wir werden sehen, dass diese Frage äquivalent zur Frage ist, ob ein $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert, so dass $X^{-1}AX$ Diagonalform hat. Nehmen wir an, dass A n linear unabhängige Eigenvektoren $x_1, ..., x_n$ mit Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n$ besitzt (Basis aus Eigenvektoren).

Setze:

$$X := \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \cdots & x_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AX = \begin{pmatrix} | & & | \\ Ax_1 & \cdots & Ax_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_n x_n \\ | & & | \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = XD$$

Da die $x_1, ..., x_n$ linear unabhängig sind, ist X invertierbar. Damit ist die Gleichung $AX = XD$ äquivalent zu $D = X^{-1}AX$.

Matrizen, für die eine invertierbare Matrix X existiert, so dass $X^{-1}AX$ diagonal ist, heißen **diagonalisierbar**. Wir haben gezeigt, dass A diagonalisierbar ist, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren besitzt. Es gilt aber auch die Umkehrung:

$$X^{-1}AX = D \Rightarrow AX = XD.$$

Für die Spalten $x_1, ..., x_n$ von X gilt somit:

$$Ax_i = \lambda_i x_i \Rightarrow x_i \text{ Eigenvektor mit Eigenwert } \lambda_i.$$

Da X invertierbar ist, bilden die $x_1, ..., x_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Wir haben folgenden Satz gezeigt:

Satz 41. *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.*

Bemerkung: Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar!

Algorithmus 7. ***(Diagonalisierung einer Matrix)***

1. *Bestimmen Sie (falls möglich) n linear unabhängige Eigenvektoren $x_1, ..., x_n$ von A.*
2. *Bilden Sie eine Matrix X mit Spaltenvektoren $x_1, ..., x_n$.*
3. *Das Produkt $X^{-1}AX$ hat Diagonalgestalt mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, ..., \lambda_n$ Eigenwerte zu $x_1, ..., x_n$.*

Wir hatten gesehen, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte 2 und 3 mit den Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat. Nach dem obigen Satz sind die Eigenvektoren linear unabhängig, bilden also eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

$$\rightsquigarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$