Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Musterlösungen zu 'Mathematik II (Elementare Lineare Algebra)'
Blatt 3
Nathan Bowler

A: Präsenzaufgaben

1. *Matrixaddition, Transposition und skalare Multiplikation*
   Wir betrachten die Matrix
   $$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie die Matrix $3A - A^T$.

   Lösung: Wir haben
   $$3A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$
   und
   $$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
   also gilt
   $$3A - A^T = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 \\ 6 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. *Matrixmultiplikation*
   Berechnen Sie das Produkt AB der Matrizen
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Lösung:
   $$AB = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 0 \\ 6 & -10 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

3. *Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ*
   Geben Sie ein Beispiel dafür, dass Multiplikation von quadratischen Matrizen nicht kommutativ ist.
   Das heißt: Finden Sie zwei quadratische Matrizen A und B, sodass $AB \neq BA$.

   Lösung: Wir setzen $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann
   $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA.$$

B: Aufgaben

Wir betrachten die folgenden 5 Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \text{ und } E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. *Linearkombinationen, Gleichungssysteme lösen*
   Ist die Matrix
   $$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
   eine Linearkombination von B und C?

   Lösung: Ja, denn $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}B - \frac{1}{2}C.$

2. *Matrixmultiplikation*
   Entscheiden Sie, ob die folgenden Produkte definiert sind und berechnen Sie diese, falls sie existieren: $AA, BB, AD, DA, AE, EA, DE, ED$.

   Lösung: Es gilt:
   $$BB = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, DA = \begin{pmatrix} 6 & -2 \end{pmatrix}, DE = \begin{pmatrix} 19 \end{pmatrix} \text{ und } ED = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -2 \\ 12 & 9 & -3 \\ -8 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Die anderen Produkte sind nicht definiert.

3. *Assoziazivität*
   Bestätigen Sie für die Matrizen A, B und C die Gültigkeit des Assoziativgesetzes $A(BC) = (AB)C$.

   Lösung:
   $$A(BC) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -2 & -5 \\ -4 & -31 \end{pmatrix}.$$
   $$(AB)C = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -1 \\ 21 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -2 & -5 \\ -4 & -31 \end{pmatrix}.$$

4. *Distributivität*
   Bestätigen Sie für die Matrizen A, B und C die Gültigket des Distributivgesetzes $A(B + C) = AB + AC$.

   Lösung:
   $$A(B+C) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 4 & -2 \\ 56 & 2 \end{pmatrix}.$$
   $$AB+AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -1 \\ 21 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & -1 \\ 35 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 4 & -2 \\ 56 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. *Multiplikation, Transposition*
Bestätigen Sie, dass $(AB)^T = B^T A^T$.

Lösung:

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -1 \\ 21 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 21 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 21 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$