Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Musterlösungen zu 'Mathematik II (Elementare Lineare Algebra)'
Blatt 2
Nathan Bowler

A: Präsenzaufgaben

1. *Zeilenstufenform und reduzierte Zeilenstufenform erkennen*
   Welche der folgenden Matrizen sind in Zeilenstufenform? Welche sind in reduzierten Zeilenstufenform?

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Lösung: (a) ist nicht in Zeilenstufenform, weil die zweite Zeile keine führende 1 hat. (b) is in Zeilenstufenform, aber nicht in reduzierter Zeilenstufenform, weil es eine 5 über der führenden 1 in der zweiten Zeile gibt. In (c) is diese führende 1 nicht mehr da (die zweite Zeile besteht nur aus Nullen), und in (d) gibt es eine Null über dieser führenden 1. Also sind (c) und (d) in reduzierter Zeilenstufenform.

2. *Gauß-Verfahren*
   Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Verfahrens:.

$$\begin{aligned} -x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= -2 \\ 6x_1 + 6x_2 + 12x_3 &= 5 \end{aligned}$$

   Lösung: Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

   Der erste von Null verschiedene Eintrag in der ersten Spalte ist die 3 in der zweiten Zeile, also vertauschen wir die erste und zweite Zeilen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

   Jetzt teilen wir die erste Zeile durch 3, um da eine führende 1 zu kriegen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das Sechsfache der ersten Zeile von der dritten Zeile, damit wir nur Nullen unter dieser führenden 1 haben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 18 & 9 \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die zweite Zeile durch -1, um da eine führende 1 zu kriegen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & 18 & 9 \end{pmatrix}$$

Wir addieren das Sechsfache der zweiten Zeile auf die dritte Zeile, damit wir nur Nullen unter dieser führenden 1 haben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die dritte Zeile durch 3, um da eine führende 1 zu kriegen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist jetzt in Zeilenstufenform, also betrachten wir wieder das entsprechende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -\frac{2}{3} \\ x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

Weil die letzte Gleichung keine Lösungen hat, ist dieses System nicht lösbar. Deshalb war das usrprüngliche Gleichungssystem auch nicht lösbar.

3. *Gauß-Jordan-Verfahren*
Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 5 \\ x_2 - 2x_3 &= 7 \\ 4x_1 - 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Lösung: Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 4 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die erste Zeile durch 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 4 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das Vierfache der ersten Zeile von der Dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

Wir addieren das Zweifache der zweiten Zeile auf die Dritte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die dritte Zeile durch -6:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren die $\frac{1}{2}$-Fache der dritten Zeile von dem Ersten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{37}{12} \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

Wir addieren das Zweifache der dritten Zeile auf die Zweite:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{37}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

Die Matrix is jetzt in reduzierter Zeilenstufenform. Die einzige Lösung ist $(\frac{37}{12}, \frac{14}{3}, -\frac{7}{6})$.

B: Aufgaben

1. *Führende und freie Variablen, Rückwärtssubstitution, Gauß-Jordan Verfahren*
Wir gehen davon aus, dass die erweiterte Koffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystem in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_6$ durch elementare Zeilenumformungen auf die folgende Zeilenstufenform gebracht wurde:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Welches sind die führenden und welches sind die freien Variablen?

(b) Finden Sie die allgemeine Lösung durch Rückwärtssubstitution.

(c) Finden Sie die allgemeine Lösung durch anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens.

Lösung;

(a) Die führende Variablen sind x_1, x_2 und x_5. Die freie Variablen sind x_3, x_4 und x_6.

(b) Wir setzen $x_3 := r$, $x_4 := s$ und $x_6 := t$. Die dritte Gleichung ist $x_5 - 3x_6 = -2$. Das heißt, $x_5 - 3t = -2$, also $x_5 = 3t - 2$. Die zweite Gleichung ist $x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1$. Das heißt, $x_2 + 3r + 2s = 1$, also $x_2 = 1 - 3r - 2s$. Die erste Gleichung ist $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 = 1$. Substitution für $x_2 \dots x_6$ in dieser Gleichung ergibt $x_1 + 2(1 - 3r - 2s) + 3r - s - (3t - 2) + 2t = 1$, woraus folgt $x_1 = 3r + 5s + t - 3$. Die allgemeine Lösung ist deshalb die Menge

$$\{(3r + 5s + t - 3, 1 - 3r - 2s, r, s, 3t - 2, t) | r, s, t \in \mathbb{R}\}.$$

(c) Wir subtrahieren das Zweifache der zweiten Zeile von der Ersten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir addieren die dritte Zeile auf die Erste:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist jetzt in reduzierter Zeilenstufenform. Wir setzen $x_3 := r$, $x_4 := s$ und $x_5 := t$. Dann wird die erste Gleichung $x_1 - 3r - 5s - t = -3$, woraus folgt $x_1 = 3r + 5s + t - 3$. Ähnlicherweise ergibt sich aus der Zweiten Gleichung, dass $x_2 = 1 - 3r - 2s$, und aus der Dritten, dass $x_5 = 3t - 2$. Die allgemeine Lösung ist deshalb die Menge

$$\{(3r + 5s + t - 3, 1 - 3r - 2s, r, s, 3t - 2, t) | r, s, t \in \mathbb{R}\}.$$

2. *Gauß-Verfahren*
Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix für das folgende lineare Gleichungssystem auf und bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit dem Gauß-Verfahren.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Lösung: Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die erste Zeile durch 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren die erste Zeile von der zweiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das Dreifache der ersten Zeile von dem Dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die zweite Zeile durch $-\frac{2}{3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Wir addieren das $\frac{1}{2}$-Fache der zweiten Zeile auf die Dritte:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die dritte Zeile durch 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist jetzt in Zeilenstufenform, also betrachten wir wieder das entsprechende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= \frac{1}{2} \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 &= -\frac{7}{3} \\ x_3 &= -11 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x_2 - \frac{1}{3}(-11) = -\frac{7}{3}$, also $x_2 = -6$. Aus der Ersten folgt $x_1 + \frac{1}{2}(-6) + \frac{1}{2}(-11) = \frac{1}{2}$, also $x_1 = 9$. Die einzige Lösung ist deshalb $(9, -6, -11)$.

3. *Gauß-Jordan-Verfahren*
Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix für das folgende lineare Gleichungssystem auf und bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Lösung: Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die erste Zeile durch 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren die erste Zeile von der zweiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das Dreifache der ersten Zeile von dem Dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die zweite Zeile durch $-\frac{2}{3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Wir addieren das $\frac{1}{2}$-Fache der zweiten Zeile auf die Dritte:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die dritte Zeile durch 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist jetzt in Zeilenstufenform, aber noch nicht in reduzierter Zeilenstufenform. Wir subtrahieren das $\frac{1}{2}$-Fache der zweiten Zeile von dem Ersten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das $\frac{2}{3}$-Fache der dritten Zeile von dem Ersten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir addieren das $\frac{1}{3}$-Fache der dritten Zeile auf die Zweite:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Die eindeutige Lösung ist also $(-1, -1, 4)$

4. *Allgemeine Lösung bestimmen*
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Lösung: Wir wenden das Gauß-Verfahren an. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die erste Zeile durch 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren die erste Zeile von der zweiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das Dreifache der ersten Zeile von dem Dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die zweite Zeile durch $-\frac{2}{3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Wir addieren das $\frac{3}{2}$-Fache der zweiten Zeile auf die Dritte:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist jetzt in Zeilenstufenform, also betrachten wir wieder das entsprechende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= \frac{1}{2} \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 &= -\frac{7}{3} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Setze $x_3 := t$. Aus der zweiten Gleichung ergibt sich $x_2 = \frac{t}{3} - \frac{7}{3}$. Aus der ersten ergibt sich $x_1 + \frac{1}{2}(\frac{t}{3} - \frac{7}{3}) + \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}$, also $x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2t}{3}$. Deshalb ist die allgemeine Lösung

$$\left\{ \left(\frac{5}{3} - \frac{2t}{3}, \frac{t}{3} - \frac{7}{3}, t \right) \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} .$$

5. *Lösungsmengen sind unter elementare Gleichungsumformungen von Typ (iii) erhalten*
Sei S_1 eine lineare Gleichungssystem. Sei S_2 eine lineare Gleichungssystem, die man von S_1 durch Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer andern Gleichung konstruieren kann. Sei $\mathbb{L}_1$ die Lösungsmenge von S_1 und sei $\mathbb{L}_2$ die Lösungsmenge von S_2.

   (a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{L}_1$ eine Teilmenge von $\mathbb{L}_2$ ist.

   (b) Beweisen Sie, dass S_1 sich auch aus S_2 durch Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer andern Gleichung konstruieren lässt.

   (c) Beweisen Sie, dass $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$. [Wegen (a) reicht es hier zu beweisen, dass $\mathbb{L}_2$ eine Teilmenge von $\mathbb{L}_1$ ist.]

Lösung:

(a) Wir nehmen an, dass S_1 aus m Gleichungen in den n Variablen $x_1 \dots x_n$ besteht, und wir nennen den Koeffizient von x_i in der j-ten Gleichung a_{ij} und die rechte Seite der j-ten Gleichung b_j. Sei λ eine Reele Zahl, und j und k natürliche Zahlen, sodass man S_2 von S_1 durch Addition des λ-Fachen der k-ten Gleichung zu der j-ten konstruiren kann. Die j-te Gleichung in S_2 hat also die Form:

$$(a_{1j} + \lambda a_{1k})x_1 + (a_{2j} + \lambda a_{2k})x_2 + \ldots + (a_{nj} + \lambda a_{nk})x_n = b_j + \lambda b_k$$

Sei $(t_1 \dots t_n)$ eine Lösung von S_1. Sie ist automatisch eine Lösung von jeder Gleichung in S_2 außer der j-ten, da diese Gleichungen auch in S_1 sind. Sie ist auch eine Lösung von der j-ten Gleichung in S_2:

$$(a_{1j} + \lambda a_{1k})t_1 + \ldots + (a_{nj} + \lambda a_{nk})t_n = (a_{1j}t_1 + \ldots + a_{nj}t_n) + \lambda(a_{1k}t_1 + \ldots + a_{nk}t_n) = b_j + \lambda b_k$$

Wir haben jetzt bewiesen, dass jede Lösung von S_1 auch eine Lösung von S_2 ist. Deshalb gilt $\mathbb{L}_1 \subseteq \mathbb{L}_2$.

(b) S_1 lässt sich durch Addition des $(-\lambda)$-Fache der k-ten Gleichung zu der j-ten.

(c) Wegen (b) folgt aus (a), dass auch $\mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{L}_1$. Deshalb sind $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$ gleich.