Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zu 'Mathematik II (Elementare Lineare Algebra)'
Blatt 2
Nathan Bowler

A: Präsenzaufgaben am 15. April

1. *Zeilenstufenform und reduzierte Zeilenstufenform erkennen*
Welche der folgenden Matrizen sind in Zeilenstufenform? Welche sind in reduzierten Zeilenstufenform?

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Gauß-Verfahren*
Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Verfahrens:.

$$\begin{aligned} -x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= -2 \\ 6x_1 + 6x_2 + 12x_3 &= 5 \end{aligned}$$

3. *Gauß-Jordan-Verfahren*
Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 5 \\ x_2 - 2x_3 &= 7 \\ 4x_1 - 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

B: Aufgaben zum 22. April

1. *Führende und freie Variablen, Rückwärtssubstitution, Gauß-Jordan Verfahren*
Wir gehen davon aus, dass die erweiterte Koffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystem in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_6$ durch elementare Zeilenumformungen auf die folgende Zeilenstufenform gebracht wurde:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Welches sind die führenden und welches sind die freien Variablen?
   (b) Finden Sie die allgemeine Lösung durch Rückwärtssubstitution.
   (c) Finden Sie die allgemeine Lösung durch anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens.

2. *Gauß-Verfahren*
Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix für das folgende lineare Gleichungssystem auf und

bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit dem Gauß-Verfahren.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

3. *Gauß-Jordan-Verfahren*
   Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix für das folgende lineare Gleichungssystem auf und bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

4. *Allgemeine Lösung bestimmen*
   Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

5. *Lösungsmengen sind unter elementare Gleichungsumformungen von Typ (iii) erhalten*
   Sei S_1 eine lineare Gleichungssystem. Sei S_2 eine lineare Gleichungssystem, die man von S_1 durch Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer andern Gleichung konstruieren kann. Sei $\mathbb{L}_1$ die Lösungsmenge von S_1 und sei $\mathbb{L}_2$ die Lösungsmenge von S_2.

   (a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{L}_1$ eine Teilmenge von $\mathbb{L}_2$ ist.

   (b) Beweisen Sie, dass S_1 sich auch aus S_2 durch Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer andern Gleichung konstruieren lässt.

   (c) Beweisen Sie, dass $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$. [Wegen (a) reicht es hier zu beweisen, dass $\mathbb{L}_2$ eine Teilmenge von $\mathbb{L}_1$ ist.]