

# Mathematik II für Studierende der Informatik (Lineare Algebra & Analysis)

– Vorlesungsskript SoSe 2025 –

STEFAN GESCHKE UND MATHIAS SCHACHT  
FACHBEREICH MATHEMATIK, UNIVERSITÄT HAMBURG



## Vorwort

Dies ist das Skript für die Vorlesung *Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis & Lineare Algebra)* des Sommersemesters 2025. Das Skript ist eine leicht veränderte und angepasste Version des Skriptes von Stefan Geschke, welches sich wiederum an dem von Thomas Andreae aus dem Sommersemester 2014 zur gleichen Vorlesung orientiert hat. Ziel der Vorlesung ist die Vertiefung mathematischer Grundlagen und Beweistechniken. Die folgenden Themen werden besprochen:

- Vektorrechnung und Matrizenringe,
- lineare Gleichungssysteme,
- Vektorräume und lineare Abbildungen,
- reelle Zahlen und Konvergenz,
- Differential- und Integralrechnung.

Die Besprechung der komplexen Zahlen (siehe Anhang [A](#)) und der Matrizenringe (siehe Kapitel [1.2](#)) wird aus Mathematik I aus dem WiSe 2024/25 vorausgesetzt.

Hamburg, Frühjahr 2025

Stefan Geschke und Mathias Schacht



## Ergänzende Literatur

- [1] G. Fischer, *Lineare Algebra*, 18th ed., Grundkurs Mathematik: Eine Einführung für Studienanfänger, Springer, 2014.
- [2] O. Forster, *Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, 12th ed., Springer, 2016.
- [3] ———, *Analysis 2: Differentialrechnung im  $\mathbb{R}^n$ , gewöhnliche Differentialgleichungen*, 10th ed., Springer, 2013.
- [4] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*, 17th ed., Mathematische Leitfäden, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009.
- [5] ———, *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*, 14th ed., Mathematische Leitfäden, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2008.
- [6] J. Kramer and A.-M. von Pippich, *Von den natürlichen Zahlen zu den Quaternionen*, Springer, 2013.
- [7] G. Teschl and S. Teschl, *Mathematik für Informatiker, Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra*, 4th ed., Springer, 2013.
- [8] ———, *Mathematik für Informatiker, Band 2: Analysis und Statistik*, 3rd ed., Springer, 2014.



# Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
Ergänzende Literatur	v
<b>Teil 1. Lineare Algebra</b>	<b>1</b>
Kapitel 1. Vektoren und Matrizen	3
1.1. Vektorrechnung	3
1.2. Matrizenringe	8
Kapitel 2. Lineare Gleichungssysteme	11
2.1. Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme	11
2.2. Elementare Umformungen und Zeilenstufenform	13
Kapitel 3. Vektorräume	23
3.1. Vektorräume und Untervektorräume	23
3.2. Lineare Unabhängigkeit	26
3.3. Basen von Vektorräumen	31
3.4. Dimension eines Vektorraums	34
3.5. Bestimmung von Basen	39
Kapitel 4. Lineare Abbildungen	43
4.1. Lineare Abbildungen und Matrizen	43
4.2. Dimensionsformel	47
4.3. Rang einer Matrix	50
4.4. Invertierbarkeit von Matrizen	55
4.5. Determinanten von Matrizen	59
4.6. Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit	69
<b>Teil 2. Analysis</b>	<b>77</b>
Kapitel 5. Reelle Zahlen, Folgen und Konvergenz	79
5.1. Axiomatische Einführung der reellen Zahlen	79
5.2. Angeordnete Körper	81
5.3. Vollständigkeit	82
5.4. Betrag und Intervalle reeller Zahlen	85

5.5. Konvergente Folgen und Grenzwerte	88
5.6. Konvergenzkriterien und Rechenregeln für Grenzwerte	91
5.7. Folgen und Reihen	97
5.8. Konstruktion der reellen Zahlen	99
Kapitel 6. Stetige Funktionen	101
6.1. Funktionsgrenzwerte	101
6.2. Stetigkeit	103
6.3. $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium der Stetigkeit	106
Kapitel 7. Differentialrechnung	111
7.1. Ableitung einer Funktion	111
7.2. Ableitungsregeln	114
7.3. Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen	119
7.4. Trigonometrische Funktionen	131
7.5. Globale und lokale Extrema	138
7.6. Das Newton-Verfahren	144
7.7. Regeln von L'Hospital	145
Kapitel 8. Integralrechnung	149
8.1. Bestimmte Integrale	149
8.2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	156
8.3. Stammfunktionen und Berechnung von Integralen	158
8.4. Uneigentliche Integrale	170
Anhang A. Komplexe Zahlen	175
Anhang. Notation	179

**Teil 1**

**Lineare Algebra**



## KAPITEL 1

# Vektoren und Matrizen

### §1.1 VEKTORRECHNUNG

In diesem Abschnitt führen wir einen Ring ein, bei dem das Kommutativgesetz für die Multiplikation nicht gilt. Dieser Ring spielt eine zentrale Rolle in der *Linearen Algebra*.

**Erinnerung:** Für einen Körper  $\mathbb{K}$  und  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\mathbb{K}^n$  die Menge aller  $n$ -Tupel mit Einträgen aus  $\mathbb{K}$

$$\mathbb{K}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}\}.$$

Wir definieren eine Addition  $+: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$  und eine Multiplikation mit einem Skalar  $\cdot: \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$  auf  $\mathbb{K}^n$ .

**Definition 1.1.** Wir nennen die Elemente von  $\mathbb{K}^n$  Vektoren. Die Summe zweier Vektoren  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$  definieren wir komponentenweise durch

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) := (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n).$$

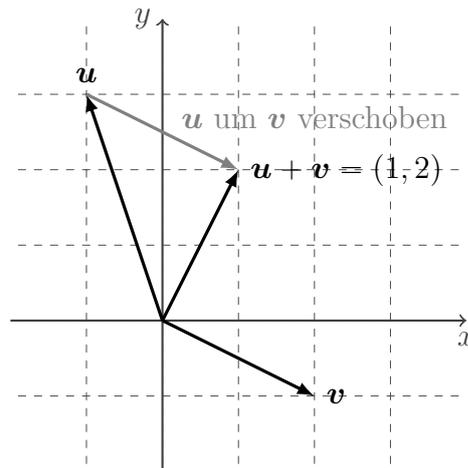
Außerdem definieren wir die Multiplikation von Vektoren mit Elementen des Körpers  $\mathbb{K}$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{K}$  und  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{K}^n$ . Dann sei

$$\alpha \cdot \mathbf{w} = \alpha \mathbf{w} := (\alpha w_1, \dots, \alpha w_n).$$

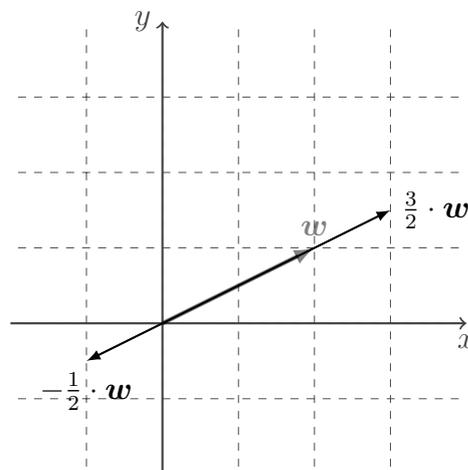
In diesem Zusammenhang nennt man  $\alpha$  ein Skalar, mit dem der Vektor  $\mathbf{w}$  skaliert wird und man spricht auch von der Multiplikation mit einem Skalar.

**Beispiel 1.2.** Wir stellen uns Vektoren in  $\mathbb{R}^2$  als Punkte in der Anschauungsebene oder als Pfeile vom Nullpunkt zu einem Punkt in der Ebene vor. Die Summe von Vektoren lässt sich dann geometrisch als Aneinanderreihung von Pfeilen interpretieren. Entsprechendes gilt in  $\mathbb{R}^3$  oder ganz allgemein in  $\mathbb{R}^n$ , wobei unsere Anschauung im Falle  $n > 3$  natürlich sehr herausgefordert wird.

- Für  $\mathbf{u} := (-1, 3)$  und  $\mathbf{v} := (2, -1)$  gilt  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1, 2)$ :



- Für  $\mathbf{w} = (2, 1)$  und  $\alpha = 3/2$ ,  $\beta = -1/2$  gilt  $\alpha\mathbf{w} = (3, 3/2)$  und  $\beta\mathbf{w} = (-1, -1/2)$ :



Die Multiplikation mit dem Skalar  $\alpha$  entspricht einer Streckung um den Faktor  $\alpha$ .

**Satz 1.3.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ .

- (i)  $(\mathbb{K}^n, +)$  ist eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element der Addition ist der Vektor  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ , den wir den Nullpunkt nennen.
- (ii) Für alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{K}^n$  und alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  gilt
  - (a)  $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$
  - (b)  $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$
  - (c)  $(\alpha \cdot \beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$
  - (d)  $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ .

BEWEIS. (i) Die Axiome für abelsche Gruppen rechnet man schnell nach. Dabei wird nur verwendet, dass  $(\mathbb{K}, +)$  eine abelsche Gruppe ist.

(ii) Die Eigenschaften der Multiplikation von Vektoren mit Skalaren rechnet man schnell nach. □

Eine Struktur der Form  $\mathbb{K}^n$  mit der Operation  $+$  und der Multiplikation mit Skalaren ist ein *Vektorraum*. Wir werden Vektorräume im zweiten Teil der Vorlesung studieren.

**Beispiel 1.4.** Wir betrachten wieder  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbf{v} = (-1, 3)$ . Sei

$$U = \{\alpha\mathbf{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Dann ist  $U$  eine Untergruppe von  $(\mathbb{R}^2, +)$ .

Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt nämlich nach Satz 1.3  $\alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{v} = (\alpha + (-\beta))\mathbf{v} \in U$ . Nach unserem Kriterium für Untergruppen folgt nun, dass  $U$  tatsächlich eine Untergruppe von  $(\mathbb{R}^2, +)$  ist.

Die Menge  $U$  der skalaren Vielfachen von  $\mathbf{v}$  ist einfach die Gerade durch den 0-Punkt, die den Vektor  $\mathbf{v}$  enthält. Die Nebenklassen von  $U$  in  $\mathbb{R}^2$  sind die Geraden in  $\mathbb{R}^2$ , die zu der Geraden  $U$  parallel sind.

Wir definieren noch eine weitere Operation zwischen Vektoren in  $\mathbb{K}^n$ .

**Definition 1.5.** Für Vektoren  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$  ist das Standard-Skalarprodukt von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  das Körperelement

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \begin{cases} u_1v_1 + \dots + u_nv_n, & \text{falls } \mathbb{K} \neq \mathbb{C}, \\ u_1\bar{v}_1 + \dots + u_n\bar{v}_n, & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Die Bezeichnungen „Skalarprodukt“ und „Multiplikation mit einem Skalar“ geben leicht Anlass zur Verwirrung. Es handelt sich um die Standardbezeichnungen und man muss aufpassen, dass man sich immer genau klarmacht, worum es geht.

**Beispiel 1.6.** (i) Für  $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$  und  $\mathbf{w} = (-1, 2, 1)$  in  $\mathbb{R}^3$  gilt

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1 + 4 + 3 = 6.$$

(ii) Für  $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4)$  und  $\mathbf{w} = (3, 4, 2, 1)$  in  $\mathbb{F}_5^4$  gilt

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \equiv 3 + 8 + 6 + 4 \pmod{5} = 1.$$

(iii) Für  $\mathbf{v} = (1 + 2\mathbf{i}, \mathbf{i})$  und  $\mathbf{w} = (-1, 5 - 3\mathbf{i})$  in  $\mathbb{C}^2$  gilt

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = (1 + 2\mathbf{i})(\overline{-1}) + \mathbf{i}(\overline{5 - 3\mathbf{i}}) = (-1 - 2\mathbf{i}) + (-3 + 5\mathbf{i}) = -4 + 3\mathbf{i}.$$

(iv) Für  $\mathbf{v} = (a_1 + \mathbf{i}b_1, \dots, a_n + \mathbf{i}b_n) \in \mathbb{C}^n$  gilt

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{j=1}^n (a_j + \mathbf{i}b_j)(\overline{a_j + \mathbf{i}b_j}) = \sum_{j=1}^n (a_j + \mathbf{i}b_j)(a_j - \mathbf{i}b_j) = \sum_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2).$$

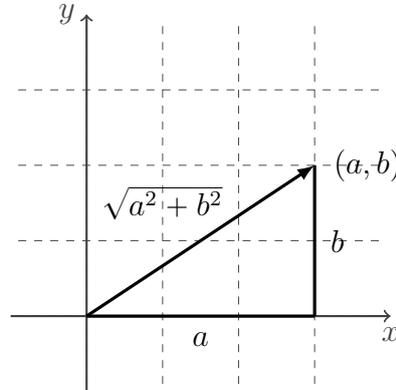
Insbesondere ist das Skalarprodukt  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$  für komplexwertige Vektoren  $\mathbf{v}$  eine nichtnegative reelle Zahl.

Man erinnere sich an den Satz von Pythagoras: In einem rechtwinkligen Dreieck, in dem die Längen der Katheten, also der Seiten, die am rechten Winkel anliegen,  $a$  und  $b$  sind, gilt für die Länge  $c$  der Hypotenuse, also der Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, die Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Insbesondere ist der Abstand des Punktes  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  vom Nullpunkt genau

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\langle (a, b), (a, b) \rangle}.$$



In der komplexen Zahlenebene und in höheren Dimensionen und gilt das Entsprechende. Daher nennen wir für Vektoren  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  oder  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  die Zahl  $|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$  den *Betrag* von  $\mathbf{v}$ . Der Betrag von  $\mathbf{v}$  ist nichts anderes als der Abstand von  $\mathbf{v}$  vom 0-Punkt. Der Betrag  $|\lambda|$  einer reellen Zahl  $\lambda$  ist der Wert, den man erhält, wenn man das Vorzeichen von  $\lambda$  weglässt. So ist  $|-5| = 5$ ,  $|2.5| = 2.5$  und  $|0| = 0$ .

Der folgende Satz fasst die Eigenschaften des Standardsskalarprodukts und des Betrages zusammen.

**Satz 1.7.** (i) Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gelten folgende Aussagen für alle  $\alpha \in \mathbb{K}$  und alle  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{K}^n$ :

(a) (1)  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$  für  $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$  (Symmetrie)

(2)  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  (Hermitizität)

(b)  $\langle \alpha \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$  und  $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ . (Linearität)

(ii) Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$ , alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{K}^n$  und alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  gelten die folgenden Aussagen:

(a)  $|\mathbf{v}| \in \mathbb{R}$  und  $|\mathbf{v}| \geq 0$ , (Nichtnegativität)

(b)  $|\mathbf{v}| = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ , (positive Definitheit)

(c)  $|\lambda \mathbf{v}| = |\lambda| |\mathbf{v}|$ , (Homogenität)

(d)  $|\mathbf{v} + \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| + |\mathbf{w}|$ . (Dreiecksungleichung)

**Bemerkung 1.8.** Mithilfe der Symmetrie folgt für  $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$  aus der Linearität im ersten Argument des Skalarprodukts auch die Linearität im zweiten Argument, d. h.

$$\langle \mathbf{v}, \alpha \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle.$$

Für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  folgt die *Sesquilinearität*

$$\langle \mathbf{v}, \alpha \mathbf{w} \rangle = \bar{\alpha} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle.$$

BEWEIS. Alle Beweise bis auf die Dreiecksungleichung, ergeben sich durch Einsetzen der Definitionen und elementaren Umformungen. Exemplarisch für die Homogenität sehen wir

$$|\lambda \mathbf{v}| = \sqrt{\langle \lambda \mathbf{v}, \lambda \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda^2 v_i^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^n v_i^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = |\lambda| \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = |\lambda| |\mathbf{v}|.$$

□

Der Beweis der Dreiecksungleichung beruht auf der folgenden Ungleichung von Cauchy und Schwarz.

**Satz 1.9** (Cauchy-Schwarz). *Für alle Vektoren  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  gilt  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$ .*

BEWEIS. Die Ungleichung gilt offensichtlich, falls  $\mathbf{v}$  der Nullvektor ist und wir können somit annehmen, dass  $\mathbf{v}$  nicht der Nullvektor ist.

Für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt

$$0 \leq |\mathbf{u} - \lambda \mathbf{v}|^2 = \langle \mathbf{u} - \lambda \mathbf{v}, \mathbf{u} - \lambda \mathbf{v} \rangle$$

und aus der Linearität und Symmetrie des Skalarproduktes (mehrmals angewendet) folgt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} - \lambda \mathbf{v}, \mathbf{u} - \lambda \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} - \lambda \mathbf{v} \rangle - \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} - \lambda \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \bar{\lambda} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} - \lambda \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \bar{\lambda} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \bar{\lambda} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \lambda \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} + |\lambda|^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Für  $\lambda = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$  ergibt sich

$$0 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = |\mathbf{u}|^2 - \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2}{|\mathbf{v}|^2} \implies |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2 \leq |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2$$

und die Ungleichung folgt durch Wurzelziehen auf beiden Seiten. □

Mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgern wir nun die Dreiecksungleichung aus Satz 1.7.

BEWEIS (DREIECKSUNGLEICHUNG DES BETRAGS). Seien  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  beliebig. Mit den Rechenregeln erhalten wir

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

und, da  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}$  zweimal der Realteil  $\Re(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)$  von  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  ist (siehe Satz A.6), gilt

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2 \Re(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) + |\mathbf{v}|^2.$$

Wegen  $\Re(z) \leq |z|$  für jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$ , folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung  $2\Re(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) \leq 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$  und somit gilt

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 \leq |\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2,$$

wodurch sich die Ungleichung

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$$

nach Wurzelziehen auf beiden Seiten ergibt.  $\square$

## §1.2 MATRIZENRINGE

**Definition 1.10.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Eine  $m \times n$ -Matrix  $\mathbf{A}$  über  $\mathbb{K}$  ist ein rechteckiges Zahlenschema der Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei die  $a_{ij}$  Elemente von  $\mathbb{K}$  sind.

Wir schreiben eine solche Matrix kürzer als  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  oder auch einfach als  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ , wenn die Dimension  $m \times n$  der Matrix klar ist. In einer solchen Matrix nennen wir  $(a_{i1}, \dots, a_{in})$  die  $i$ -te Zeile und

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

die  $j$ -te Spalte. Die Menge der  $m \times n$ -Matrizen über dem Körper  $\mathbb{K}$  bezeichnen wir mit  $\mathbb{K}^{m \times n}$ .

Man beachte, dass eine  $m \times n$ -Matrix im wesentlichen denselben Informationsgehalt wie ein Vektor in  $\mathbb{K}^{m \cdot n}$  hat, nur dass die Matrix graphisch anders dargestellt wird.

Entsprechend definieren wir auch die Summe von zwei  $m \times n$ -Matrizen.

**Definition 1.11.** Für zwei  $m \times n$ -Matrizen  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  und  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  über einem Körper  $\mathbb{K}$  sei  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  die Matrix

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Der Eintrag in der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte der Matrix  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  lautet also  $a_{ij} + b_{ij}$ .

Die  $m \times n$ -Matrix, deren Einträge alle 0 sind, nennen wir die Nullmatrix  $\mathbf{0} \in \mathbb{K}^{m \times n}$  im Format  $m \times n$ .

Für  $\alpha \in \mathbb{K}$  und  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$  sei  $\alpha \mathbf{A}$  die Matrix

$$\alpha \mathbf{A} := (\alpha a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Wie im Falle von  $\mathbb{K}^n$  sieht man schnell, dass  $(\mathbb{K}^{m \times n}, +)$  eine abelsche Gruppe ist. Neben der Addition von Matrizen und der Multiplikation von Matrizen mit Skalaren gibt es eine weitere Verknüpfung von Matrizen, die fast noch wichtiger ist als die beiden schon genannten Operationen, nämlich die Matrizenmultiplikation.

**Definition 1.12.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und seien  $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ . Weiter sei  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{\ell \times m}$  und  $\mathbf{B} = (b_{jk}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ . Dann ist  $\mathbf{AB} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  die  $\ell \times n$ -Matrix  $\mathbf{C} = (c_{ik})$ , deren Eintrag  $c_{ik}$  das Körperelement

$$c_{ik} := a_{i1}b_{1k} + \dots + a_{im}b_{mk} = \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk},$$

also das Skalarprodukt der  $i$ -ten Zeile von  $\mathbf{A}$  mit der  $k$ -ten Spalte von  $\mathbf{B}$ , ist. Es gilt also

$$\mathbf{AB} = \left( \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk} \right)_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq k \leq n}}.$$

Die Matrizenmultiplikation  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  ist nur dann definiert, wenn  $\mathbf{A}$  genauso viele Spalten hat, wie  $\mathbf{B}$  Zeilen hat. Die Ergebnismatrix  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$  hat dann soviele Zeilen wie  $\mathbf{A}$  und soviele Spalten wie  $\mathbf{B}$ . Eine wichtige, nichttriviale Eigenschaft der Matrizenmultiplikation ist die Assoziativität.

**Satz 1.13.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und seien  $k, \ell, m, n \in \mathbb{N}$ . Sind  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{k \times \ell}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{\ell \times m}$  und  $\mathbf{C} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ , so gilt

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

Der Beweis der Assoziativität der Matrizenmultiplikation ist eine gute Übungsaufgabe.

Betrachtet man  $n \times n$ -Matrizen für ein festes  $n$ , so kann man die Matrizen in beliebiger Reihenfolge multiplizieren und erhält wieder  $n \times n$ -Matrizen.

**Satz 1.14.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Dann ist  $(\mathbb{K}^{n \times n}, +, \cdot)$  ein Ring (mit Eins), der Ring der  $n \times n$ -Matrizen über  $\mathbb{K}$ .

**Bemerkung 1.15.** • Das neutrale Element bezüglich der Multiplikation bzw. das Einselement in dem Ring  $\mathbb{K}^{n \times n}$  ist die *Einheitsmatrix*

$$\mathbf{E}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

bei der auf der Diagonalen Einsen stehen und sonst nur Nullen.

- Die Einheitengruppe des Matrizenringes  $\mathbb{K}^{n \times n}$  sind die *invertierbaren Matrizen*.
- Der Matrizenring  $\mathbb{K}^{n \times n}$  ist für  $n > 1$  nicht kommutativ, wie man an folgendem Beispiel sieht

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Der Beweis von Satz 1.14 ist leicht nachprüfbar und wird als Übung überlassen.

## Lineare Gleichungssysteme

### §2.1 LINEARE GLEICHUNGEN UND GLEICHUNGSSYSTEME

**Beispiel 2.1.** Die Gleichung

$$2x - 3 = 5$$

ist eine *lineare Gleichung* in der Variablen  $x$ . Diese Gleichung lässt sich leicht umformen zu der Gleichung

$$2x = 8.$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu  $x = 4$ . Die Zahl 4 *löst* also die Gleichung.

Im Allgemeinen lässt sich eine lineare Gleichung in einer Unbekannten in der Form

$$ax = b$$

schreiben. Dabei ist  $x$  die *Unbekannte* bzw. *Variable*. Der *Koeffizient*  $a$  und  $b$  sind Elemente eines festen Körpers  $\mathbb{K}$ .

Unsere Diskussion linearer Gleichungen und Systeme linearer Gleichungen bezieht sich im Prinzip auf Gleichungen mit Koeffizienten in beliebigen Körpern. Konkrete Beispiele werden jedoch meistens reelle Koeffizienten haben.

**Beispiel 2.2.** Die Gleichung

$$4x - 2y = 1$$

ist eine lineare Gleichung in den zwei Variablen  $x$  und  $y$ . Wir bringen  $y$  auf die rechte Seite und erhalten

$$2y = 4x - 1.$$

Division durch 2 liefert

$$y = 2x - \frac{1}{2}.$$

Lösungen dieser Gleichung sind alle Paare  $(x, y)$  der Form

$$\left( t, 2t - \frac{1}{2} \right),$$

wobei der *Parameter*  $t$  eine reelle Zahl ist. Die *Lösungsmenge* der Gleichung ist also die Menge

$$\left\{ \left( t, 2t - \frac{1}{2} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Definition 2.3.** (a) Eine lineare Gleichung in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  ist eine Gleichung der Form

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b,$$

wobei die Koeffizienten  $a_1, \dots, a_n$  und  $b$  Elemente eines festen Körpers  $\mathbb{K}$  sind. Die Lösungsmenge der Gleichung ist die Menge der Vektoren

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b\}.$$

(b) Ein lineares Gleichungssystem in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  besteht aus mehreren linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Ein  $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  löst das Gleichungssystem, wenn  $(x_1, \dots, x_n)$  jede der  $m$  linearen Gleichungen erfüllt. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist also der Durchschnitt der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen.

Wir führen die folgende Begriffe bezüglich der Lösbarkeit von Gleichungssystemen.

**Definition 2.4.** (i) Ein Gleichungssystem heißt konsistent oder lösbar, falls überhaupt eine Lösung existiert.

(ii) Ein Gleichungssystem heißt inkonsistent oder unlösbar, falls keine Lösung existiert.

(iii) Ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

heißt homogen, falls  $b_1 = \dots = b_m = 0$  gilt.

(iv) Jedes homogene Gleichungssystem hat den Nullvektor  $(v_1, \dots, v_n) = (0, \dots, 0)$  als triviale Lösung. Ein homogenes Gleichungssystem kann aber außer der trivialen Lösung noch weitere Lösungen haben.

(v) Wir nennen zwei lineare Gleichungssysteme in denselben Variablen äquivalent, falls sie dieselben Lösungsmengen haben.

Einem linearen Gleichungssystem können wir nun verschiedene Matrizen zuordnen.

**Definition 2.5.** Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

hat die Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

wobei der trennende Strich vor der letzten Spalte oft auch weggelassen wird.

**Beispiel 2.6.** Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

und die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right).$$

## §2.2 ELEMENTARE UMFORMUNGEN UND ZEILENSTUFENFORM

Im Folgenden werden wir sehen, wie man lineare Gleichungssysteme löst, wie man einem Gleichungssystem ansieht, ob es lösbar ist und wie die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems aussieht. Dazu benutzen wir *elementare Gleichungsumformungen* bzw. *elementare Zeilenumformungen*.

**Definition 2.7.** Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizienten aus  $\mathbb{K}$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Die folgenden Operationen nennen wir elementare Gleichungsumformungen:

- (1) Vertauschen zweier Gleichungen,
- (2) Multiplikation einer Gleichung mit einer von 0 verschiedenen Konstante aus  $\mathbb{K}$ ,
- (3) Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

**Beispiel 2.8.** Wir betrachten wieder das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Vertauschen der letzten beiden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit 2 liefert

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 18 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Addition des (-1)-fachen der dritten Gleichung zur ersten Gleichung (bzw. Subtraktion der dritten Gleichung von der ersten Gleichung) liefert

$$\begin{aligned} -2x_2 + 7x_3 &= 17 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass das Ergebnis der Addition des  $c$ -fachen der  $i$ -ten Gleichung zur  $k$ -ten Gleichung die neue  $k$ -te Gleichung wird.

**Satz 2.9.** *Elementare Gleichungsumformungen ändern die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems nicht. D.h., zwei Gleichungssysteme, die durch elementare Gleichungsumformungen auseinander hervorgehen, haben dieselben Lösungsmengen.*

BEWEIS. (1) Die Lösungsmenge eines Gleichungssystems ändert sich offensichtlich nicht, wenn die Gleichungen in unterschiedlicher Reihenfolge aufgeschrieben werden und somit dürfen zwei Gleichungen insbesondere vertauscht werden.

(2) Sei  $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Da  $\mathbb{K}$  ein Körper ist, existiert somit das Inverse  $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ . Wenn  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$  eine Gleichung  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$  löst, dann gilt

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = b,$$

und somit gilt auch auch

$$\alpha b = \alpha(a_1v_1 + \dots + a_nv_n) = (\alpha a_1)v_1 + \dots + (\alpha a_n)v_n.$$

D. h.  $\mathbf{v}$  löst auch die Gleichung  $(\alpha a_1)x_1 + \dots + (\alpha a_n)x_n = \alpha b$ , die wir erhalten, nachdem wir die Gleichung mit der Konstanten  $\alpha$  multipliziert haben.

Sei nun umgekehrt  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$  eine Lösung der mit  $\alpha$  multiplizierten Gleichung, d. h.  $\mathbf{v}$  löst  $\alpha a_1x_1 + \dots + \alpha a_nx_n = \alpha b$  und es gilt

$$\alpha a_1v_1 + \dots + \alpha a_nv_n = \alpha b.$$

Nun argumentieren wir wie oben. Allerdings multiplizieren wir die Gleichung mit dem Inversen  $\alpha^{-1}$ , um zu zeigen, dass  $\mathbf{v}$  auch eine Lösung der Originalgleichung ist.

(3) Abschließend zeigen wir, dass auch elementare Umformungen vom Typ (3) die Lösungsmenge nicht ändern. Seien Gleichungen

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \quad \text{und} \quad a'_1x_1 + \dots + a'_nx_n = b' \quad (2.1)$$

und eine Konstante  $\alpha \in \mathbb{K}$  gegeben. Wenn wir die zweite Gleichung mit  $\alpha$  multiplizieren und auf die erste addieren, erhalten wir die beiden Gleichungen

$$(a_1 + \alpha a'_1)x_1 + \dots + (a_n + \alpha a'_n)x_n = b + \alpha b' \quad \text{und} \quad a'_1x_1 + \dots + a'_nx_n = b' \quad (2.2)$$

Falls  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$  eine Lösung von (2.1) ist, dann löst  $\mathbf{v}$  offensichtlich die zweite Gleichung in (2.2), da diese im Originalsystem vorkam. Der Vektor  $\mathbf{v}$  ist auch eine Lösung der ersten Gleichung von (2.2), da

$$\begin{aligned} (a_1 + \alpha a'_1)v_1 + \dots + (a_n + \alpha a'_n)v_n &= (a_1v_1 + \dots + a_nv_n) + \alpha(a'_1v_1 + \dots + a'_nv_n) \\ &= b + \alpha b'. \end{aligned}$$

Sei nun umgekehrt  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$  eine Lösung von (2.2). Es ist zu zeigen, dass  $\mathbf{v}$  dann auch eine Lösung von der ersten Gleichung in (2.1) ist (die zweite Gleichung ist ja in beiden Systemen enthalten). Da  $\mathbf{v}$  eine Lösung von  $a'_1x_1 + \dots + a'_nx_n = b'$  ist, gilt also

$$a'_1v_1 + \dots + a'_nv_n = b' \quad \implies \quad \alpha(a'_1v_1 + \dots + a'_nv_n) = \alpha b' \quad (2.3)$$

Als Lösung von (2.2) löst  $\mathbf{v}$  auch die erste Gleichung von (2.2) und somit gilt

$$\begin{aligned} b + \alpha b' &= (a_1 + \alpha a'_1)v_1 + \cdots + (a_n + \alpha a'_n)v_n \\ &= (a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) + \alpha(a'_1v_1 + \cdots + a'_nv_n) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} (a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) + \alpha b' \end{aligned}$$

und es folgt  $b = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ , d. h.  $\mathbf{v}$  löst auch die erste Gleichung aus (2.1).  $\square$

**Definition 2.10.** Die elementaren Gleichungsumformungen eines linearen Gleichungssystems entsprechen elementaren Zeilenumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix:

- (1) Vertauschen zweier Zeilen,
- (2) Multiplikation einer Zeile mit einer von 0 verschiedenen Konstante aus  $\mathbb{K}$ ,
- (3) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

**Beispiel 2.11.** Wir betrachten die erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems aus Beispiel 2.8:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot 2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 18 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow \\ \leftarrow \cdot (-1) \end{array} \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 7 & 17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{array} \right).$$

Im ersten Schritt wurde die erste Zeile mit 2 multipliziert und die letzten beiden Zeilen wurden vertauscht. Dadurch ist die mittlere Matrix entstanden. Diese Matrix unterscheidet sich von der ersten Matrix, aber nach Satz 2.9 haben die beiden Gleichungssysteme mit diesen erweiterten Koeffizientenmatrizen die gleichen Lösungsvektoren, d. h. die entsprechenden Gleichungssysteme sind äquivalent. Die dritte Matrix entstand aus der zweiten, indem die letzte Zeile von der ersten abgezogen wurde, was ebenfalls eine elementare Zeilenumformung ist.

**Definition 2.12.** Eine Matrix ist in Zeilenstufenform wenn folgende Punkte erfüllt sind:

- (i) Alle Zeilen, die nur Nullen enthalten, stehen unten in der Matrix.
- (ii) Wenn eine Zeile nicht nur Nullen enthält, so ist der am weitesten links stehende, von Null verschiedene Eintrag eine Eins (die führende Eins dieser Zeile).
- (iii) Für je zwei verschiedene Zeilen, die nicht nur Nullen enthalten, steht die führende Eins der oberen Zeile echt weiter links als die führende Eins der unteren Zeile.

In einer Matrix in Zeilenstufenform stehen also in Spalten mit führenden Einsen unter den führenden Einsen nur Nullen. Ist eine Matrix in Zeilenstufenform und stehen auch über den führenden Einsen nur Nullen, so ist die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform.

**Beispiel 2.13.** Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind in Zeilenstufenform, aber nicht in reduzierter Zeilenstufenform. Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind nicht in Zeilenstufenform. Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind in reduzierter Zeilenstufenform.

Ist die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems in Zeilenstufenform, so können wir leicht die Lösungsmenge des Gleichungssystems bestimmen.

**Beispiel 2.14.** Wir betrachten das Gleichungssystem

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 2$$

$$x_2 - 7x_3 - x_4 = 3$$

$$x_3 + 2x_4 = 1.$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

ist in Zeilenstufenform. Wir formen die dritte Gleichung um und erhalten

$$x_3 = 1 - 2x_4.$$

Umformen der zweiten Gleichung liefert

$$x_2 = 3 + 7x_3 + x_4.$$

Anstelle von  $x_3$  können wir  $1 - 2x_4$  einsetzen. Das liefert

$$x_2 = 3 + 7(1 - 2x_4) + x_4 = 3 + 7 - 14x_4 + x_4 = 10 - 13x_4.$$

Durch Umformen der ersten Gleichung ergibt sich

$$x_1 = 2 - 4x_2 - 2x_3 - 9x_4.$$

Wieder können wir die bereits erhaltenen Ausdrücke für  $x_2$  und  $x_3$  einsetzen. Das liefert

$$x_1 = 2 - 4(10 - 13x_4) - 2(1 - 2x_4) - 9x_4 = 2 - 40 + 52x_4 - 2 + 4x_4 - 9x_4 = -40 + 47x_4.$$

Das heißt, dass  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  durch  $x_4$  eindeutig bestimmt sind. Dieses Verfahren nennen wir *Rückwärtseinsetzen*.

Wir führen einen Parameter  $t \in \mathbb{R}$  ein und setzen  $x_4 := t$ . Dann ergibt sich  $x_3 = 1 - 2t$ ,  $x_2 = 10 - 13t$  und  $x_1 = -40 + 47t$ . Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist die Menge

$$\{(-40 + 47t, 10 - 13t, 1 - 2t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \{(-40, 10, 1, 0) + t \cdot (47, -13, -2, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Wir nennen  $(-40 + 47t, 10 - 13t, 1 - 2t, t)$  für  $t \in \mathbb{R}$ , die *allgemeine Lösung* des Gleichungssystems in *Parameterform*.

**Definition 2.15.** *Ist ein Gleichungssystem in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  gegeben, dessen Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform ist, so nennen wir die Variablen, die zu Spalten mit führenden Einsen gehören, führende Variablen. Die anderen Variablen heißen freie Variablen.*

Im Beispiel 2.14 ist die Variable  $x_4$  frei, alle anderen sind führend. Die Werte der freien Variablen können wir frei wählen und erhalten immer eine entsprechende Lösung des Gleichungssystems. Die Lösungswerte der führenden Variablen ergeben sich aus den gewählten Werten der freien Variablen.

Wenn die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems reduzierte Zeilenstufenform hat, dann ist es noch einfacher, die allgemeine Lösung zu bestimmen.

**Beispiel 2.16.** Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

hat die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right),$$

welche bereits in reduzierter Zeilenstufenform vorliegt.

Die führenden Variablen sind  $x_1$  und  $x_3$ . Die Variable  $x_2$  ist frei. Durch die zweite Gleichung ist  $x_3$  bereits eindeutig bestimmt. Die erste Gleichung liefert  $x_1 = 4 - 2x_2$ . Führen wir wieder einen Parameter  $t$  ein und setzen  $x_2 := t$ , so erhalten wir die allgemeine Lösung  $(4 - 2t, t, 3)$  für  $t \in \mathbb{R}$ .

Im Unterschied zum Beispiel 2.14 können wir die Lösung des Gleichungssystems in diesem Falle direkt ablesen und ein Rückwärtseinsetzen ist unnötig.

**Satz 2.17.** *Mittels elementarer Zeilenumformungen lässt sich jede Matrix über einem Körper  $\mathbb{K}$  in eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform überführen. Der folgende Algorithmus, das Gauß-Jordan-Verfahren, leistet das Gewünschte:*

- (1) *Bestimme die am weitesten links stehende Spalte der Matrix, die von Null verschiedene Werte enthält.*

- (2) Ist der oberste Eintrag der gefundenen Spalte eine Null, so vertausche die oberste Zeile mit einer geeigneten Zeile, die in dieser Spalte keine Null hat.
- (3) In der betrachteten Spalte ist nun der oberste Eintrag ein von Null verschiedenes Körperelement  $a$ . Dividiere die erste Zeile der Matrix durch  $a$  und erzeuge so eine führende Eins.
- (4) Addiere/subtrahiere das jeweils passende Vielfache der ersten Zeile zu den anderen Zeilen, so dass alle Einträge unter der führenden Eins der ersten Zeile Null werden.
- (5) Wende die Schritte (1)–(4) auf die Matrix an, die man durch Streichen der ersten Zeile erhält und iteriere das Verfahren bis die Matrix Zeilenstufenform hat.
- (6) Mit der letzten nicht verschwindenden Zeile beginnend, addiere geeignete Vielfache dieser Zeile zu den darüber liegenden Zeilen, um über den führenden Einsen Nullen zu erzeugen.

BEWEIS. Da bei jeder Iteration der Schritte (1)–(4) die zu bearbeitende Matrix eine Zeile weniger hat, folgt z. B. mit vollständiger Induktion, dass die Schritte (1)–(5) eine jede gegebene Matrix nach endlich vielen Schritten in Zeilenstufenform überführen.

Genauso wird bei jeder Iteration im Schritt (6) die noch zu bearbeitende Matrix um eine Spalte verkürzt und eine einfache Induktion zeigt, dass die gegebene Matrix dadurch in reduzierte Zeilenstufenform überführt wird.  $\square$

Wir können nun lineare Gleichungssysteme lösen, indem wir zunächst die erweiterte Koeffizientenmatrix nach dem Gauß-Jordan-Verfahren in reduzierte Zeilenstufenform bringen und dann die Lösungen des Gleichungssystems an dieser erweiterten Koeffizientenmatrix ablesen.

In manchen Fällen ist es günstiger, den Schritt (6) wegzulassen und die Lösungen eines Gleichungssystems anhand der erweiterten Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform durch Rückwärtseinsetzen zu bestimmen. Diese Variante des Gauß-Jordan-Verfahrens nennt man das *Gauß-Verfahren*. Betrachtet man nur Matrizen und keine Gleichungssysteme, so nennt man das Verfahren, in dem man nur die Schritte (1)–(5) einsetzt, um eine Matrix in Zeilenstufenform zu bringen, ebenfalls *Gauß-Verfahren*.

Während eine Matrix verschiedene Zeilenstufenformen haben kann, ist die reduzierte Zeilenstufenform eindeutig bestimmt.

**Beispiel 2.18.** Wir lösen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\2x + 4y - 3z &= 1 \\3x + 6y - 5z &= 0\end{aligned}$$

mittels des Gauß-Verfahrens. Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right).$$

Die erste Spalte ist die am weitesten links stehende Spalte, in der von Null verschiedene Einträge auftreten. Der erste Eintrag der ersten Zeile ist bereits von Null verschieden. Also müssen keine Zeilen getauscht werden. Der erste Eintrag der ersten Zeile ist bereits eine führende Eins. Also müssen wir die Zeile nicht noch dividieren, um eine führende Eins zu erzeugen. Die Nullen unterhalb der führenden Eins erhalten wir dadurch, dass wir das 2-fache der ersten Zeile von der zweiten und das 3-fache von der dritten Zeile abziehen:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-2) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right)$$

Wir setzen das Gauß-Verfahren mit der zweiten Zeile der Matrix fort. Streicht man die erste Zeile der Matrix, so ist die zweite Spalte die am weitesten links stehende, die von Null verschiedene Einträge hat. Die zweite Zeile der Matrix hat in der zweiten Spalte einen von Null verschiedenen Eintrag, nämlich 2. Also teilen wir diese Zeile durch 2, um eine führende Eins zu erzeugen und ziehen danach das 3-fache dieser Zeile von der dritten Zeile ab:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right) \mid : 2 \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-3) \\ \leftarrow + \end{array} \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \right).$$

Schließlich multiplizieren wir die letzte Zeile mit  $-2$  (bzw. wir teilen sie durch  $-1/2$ ), um eine führende 1 zu erhalten

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \right) \mid \cdot (-2) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Das zugehörige Gleichungssystem lautet

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen liefert die eindeutige Lösung  $z = 3$ ,

$$y = -\frac{17}{2} + \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} + \frac{7}{2} \cdot 3 = 2$$

und

$$x = 9 - y - 2z = 9 - 2 - 2 \cdot 3 = 1.$$

**Beispiel 2.19.** Wir wollen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0. \end{aligned}$$

nun mittels des Gauß-Jordan-Verfahrens lösen.

Wir wissen bereits aus dem vorherigen Beispiel, dass sich die erweiterte Koeffizientenmatrix in die Zeilenstufenform

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

bringen lässt. Wir wenden nun den Schritt (6) aus dem Gauß-Jordan-Verfahren an.

Zunächst addieren wir das  $\frac{7}{2}$ -fache der dritten Zeile zur zweiten Zeile und ziehen das 2-fache der dritten Zeile von der ersten Zeile ab:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow \cdot \frac{7}{2} \\ \leftarrow \cdot (-2) \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Schließlich subtrahieren wir die zweite Zeile von der ersten Zeile und erhalten

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\leftarrow \cdot (-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

die reduzierte Zeilenstufenform. Wir können direkt die Lösung  $x = 1$ ,  $y = 2$  und  $z = 3$  ablesen.

**Beispiel 2.20.** Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= 6 \\ x + y &= 0 \\ x + 2y &= 0. \end{aligned}$$

Die Anwendung des Gauß-Verfahrens auf die erweiterte Koeffizientenmatrix liefert die Zeilenstufenform

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{\leftarrow \cdot (-2)} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \right).$$

Damit ergibt sich  $x = 6$ ,  $y = -6$  und

$$0 = 0x + 0y = 6.$$

Letzteres ist aber für alle  $x$  und  $y$  falsch. Damit ist das Gleichungssystem unlösbar.

**Beispiel 2.21.** Wir betrachten das Gleichungssystem

$$x + 2y = 4$$

$$3x + 6y = 12.$$

Überführt man die erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform, dann erhält man

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-3) \\ \leftarrow + \end{array} \longrightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Es ergibt sich  $x = 4 - 2y$ . Wir führen wieder einen Parameter  $t$  ein und können nun die Lösungsmenge des Gleichungssystems in der Form

$$\{(4 - 2t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \{(4, 0) + t \cdot (-2, 1) : t \in \mathbb{R}\}$$

angeben.

Für lineare Gleichungssysteme über den reellen Zahlen treten also drei mögliche Fälle auf: ein lineares Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, es ist unlösbar, oder es gibt unendlich viele verschiedene Lösungen. Wir werden später sehen, dass es zumindest über  $\mathbb{R}$  keine weiteren Fälle gibt.

## KAPITEL 3

### Vektorräume

Zentraler Untersuchungsgegenstand in der Linearen Algebra sind Vektorräume und lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen. In diesem Kapitel befassen wir uns mit den grundlegenden Eigenschaften von Vektorräumen.

#### §3.1 VEKTORRÄUME UND UNTERVEKTORRÄUME

Der  $\mathbb{K}^n$  mit der Vektoraddition und der Multiplikation mit Skalaren aus  $\mathbb{K}$  erfüllt die Rechenregeln aus Satz 1.3 und ist damit das Standardbeispiel eines Vektorraums. Die folgende Definition des Vektorraums abstrahiert diese Eigenschaften.

**Definition 3.1.** Sei  $V$  eine Menge und  $+: V \times V \rightarrow V$  eine zweistellige Operation. Weiter sei  $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$  eine Abbildung. Dann ist  $(V, +, \cdot)$  ein Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{K}$  (oder ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum), falls für alle  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  und alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  die folgenden Axiome erfüllt sind:

- (i)  $(V, +)$  ist eine abelsche Gruppe,
- (ii)  $\lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{u}) = (\lambda \cdot \mu) \mathbf{u}$ ,
- (iii)  $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ ,
- (iv)  $\lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v}$ ,
- (v)  $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{u}$ .

Die Elemente eines Vektorraumes nennen wir Vektoren, die Elemente des Körpers  $\mathbb{K}$  Skalare.

**Beispiel 3.2.** Satz 1.3 zeigt, dass  $\mathbb{K}^n$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist.

**Beispiel 3.3.** Für natürliche Zahlen  $m$  und  $n$  ist die Menge der  $m \times n$ -Matrizen über einem Körper  $\mathbb{K}$  mit komponentenweiser Addition und Multiplikation mit einem Skalar ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Tatsächlich ist dieser Vektorraum isomorph zum  $\mathbb{K}^{m \cdot n}$ .

**Beispiel 3.4.** Wir betrachten ein homogenes lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

über dem Körper  $\mathbb{K}$ .

Angenommen  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{K}^n$  lösen beide das Gleichungssystem. Dann gilt für jedes  $i \in [m] = \{1, \dots, m\}$

$$a_{i1}(v_1 + w_1) + \dots + a_{in}(v_n + w_n) = a_{i1}v_1 + \dots + a_{in}v_n + a_{i1}w_1 + \dots + a_{in}w_n = 0 + 0 = 0.$$

Damit ist auch  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  eine Lösung des Gleichungssystems.

Für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $i \in [m]$  gilt

$$a_{i1}\lambda v_1 + \dots + a_{in}\lambda v_n = \lambda \cdot (a_{i1}v_1 + \dots + a_{in}v_n) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Damit ist auch  $\lambda \cdot \mathbf{v}$  eine Lösung des Gleichungssystems. Insbesondere sind auch  $-\mathbf{v}$  und die triviale Lösung  $\mathbf{0}$  Lösungen des Gleichungssystems.

Also ist die Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems in  $n$  Variablen über einem Körper  $\mathbb{K}$  eine Untergruppe von  $(\mathbb{K}^n, +)$ . Somit ist die Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems ein Vektorraum, da die Rechenregeln (ii)–(v) aus Definition 3.1 wieder aus Satz 1.3 folgen.

**Beispiel 3.5.** Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Mit  $[0, 1]$  bezeichnen wir das *Interval*

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}.$$

Weiter sei

$$M := \{f : f \text{ ist eine Funktion von } [0, 1] \text{ nach } \mathbb{R}\}.$$

Wir definieren eine Addition  $+$ :  $M \times M \rightarrow M$  und eine Multiplikation  $\cdot$ :  $\mathbb{R} \times M \rightarrow M$  mit Skalaren aus  $\mathbb{R}$ .

Für  $f, g \in M$  sei  $f + g$  die Abbildung von  $[0, 1]$  nach  $\mathbb{R}$ , die punktweise wie folgt definiert ist:

$$(f + g)(a) := f(a) + g(a) \quad \text{für alle } a \in [0, 1].$$

Genauso definieren wir für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $f \in M$  die Abbildung  $\lambda f$  durch

$$(\lambda f)(a) := \lambda f(a) \quad \text{für alle } a \in [0, 1].$$

Man kann leicht nachprüfen, dass die  $(M, +)$  eine abelsche Gruppe ist, wobei die konstante Nullfunktion  $f(a) = 0$  für alle  $a \in [0, 1]$  das neutrale Element ist und das Inverse  $-f$  von  $f$  ist durch  $(-1)f$  gegeben. Weiterhin gelten die Rechenregeln (ii)–(v) aus Definition 3.1 und  $(M, +, \cdot)$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

**Beispiel 3.6.** Die Menge der Polynome  $\mathbb{K}[X]$  über einem Körper  $\mathbb{K}$  mit der üblichen Addition von Polynomen und der üblichen Multiplikation von Polynomen mit Körperelementen, also konstanten Polynomen, ist ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$ . Man beachte, dass in diesem Beispiel die Multiplikation mit einem Skalar einfach die Einschränkung der Multiplikation von Polynomen ist, da wir die Skalare aus  $\mathbb{K}$  mit den konstanten Polynomen identifizieren.

**Lemma 3.7.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$ . Folgende Aussagen gelten für alle  $\mathbf{v} \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ :

- (1)  $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- (2)  $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- (3)  $(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$
- (4)  $\lambda \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \implies \lambda = 0$  oder  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

BEWEIS. (1) Nach den Axiomen für Vektorräume gilt

$$\lambda \mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda \mathbf{0} + \lambda \mathbf{0}.$$

Da  $(V, +)$  eine abelsche Gruppe ist, folgt daraus  $\mathbf{0} = \lambda \mathbf{0}$ .

(2) Es gilt

$$0\mathbf{v} = (0 + 0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}.$$

Wieder folgt daraus  $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

(3) Es gilt

$$\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = 1\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = (1 - 1)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Also ist  $(-1)\mathbf{v}$  das bezüglich der Addition Inverse von  $\mathbf{v}$ . Es gilt  $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ .

(4) Angenommen  $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , wobei  $\lambda \neq 0$ . Da  $\mathbb{K}$  ein Körper ist, existiert das multiplikative Inverse  $\lambda^{-1}$ . Nun ist

$$\mathbf{v} = 1\mathbf{v} = (\lambda^{-1}\lambda)\mathbf{v} = \lambda^{-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

□

**Definition 3.8.** Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $\mathbb{K}$ . Eine nichtleere Teilmenge  $W \subseteq V$  ist ein Untervektorraum (oder einfach Unterraum) von  $V$ , falls gilt:

- (i) für alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$  ist  $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$ ,
- (ii) für alle  $\mathbf{w} \in W$  und alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  ist  $\lambda\mathbf{w} \in W$ .

Man beachte, dass aus (i) und (ii) und Lemma 3.7 folgt, dass jeder Unterraum  $W$  eines Vektorraumes  $V$  eine Untergruppe von  $(V, +)$  ist, da nämlich für jedes  $\mathbf{w} \in W$  auch  $-\mathbf{w} = (-1)\mathbf{w}$  und  $\mathbf{0} = 0\mathbf{w}$  Elemente von  $W$  sind. Insbesondere ist also  $(W, +)$  eine abelsche Gruppe und somit ist jeder Untervektorraum auch selbst ein Vektorraum.

**Beispiel 3.9.** (a) Ist  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, so ist  $V$  ein Unterraum von  $V$ . Auch die Menge  $\{\mathbf{0}\} \subseteq V$  ist ein Unterraum von  $V$ .

(b) Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems in  $n$  Variablen über einem Körper  $\mathbb{K}$  ist ein Unterraum von  $\mathbb{K}^n$ .

(c) Sei  $W := \{(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{K}^n : w_1 = 0\}$ . Dann ist  $W$  ein Unterraum von  $\mathbb{K}^n$ .

(d) Die Menge  $\{p \in \mathbb{K}[X] : \text{grad}(p) \leq 5\}$  der Polynome über  $\mathbb{K}$ , deren Grad höchstens 5 ist, ist ein Unterraum des  $\mathbb{K}$ -Vektorraumes aller Polynome über  $\mathbb{K}$ .

## §3.2 LINEARE UNABHÄNGIGKEIT

**Definition 3.10.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ . Einen Ausdruck der Form

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{v}_r$$

nennen wir eine Linearkombination der Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ . Wir unterscheiden nicht strikt zwischen dem Wert der Linearkombination, also dem Vektor, der das Ergebnis der Linearkombination ist, und dem formalen Ausdruck.

- Sind die Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  alle 0, so sprechen wir von der trivialen Linearkombination. Letztere ergibt immer den Nullvektor  $\mathbf{0}$ .
- Außerdem erhalten wir für die leere Linearkombination für  $r = 0$  ebenfalls den Nullvektor, da leere Summen das Nullelement ergeben, welches in  $(V, +)$  der Nullvektor  $\mathbf{0}$  ist.

**Beispiel 3.11.** (a) Seien  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$ ,  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = -2$ . Dann ist

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = (1, 2, 3) - 2 \cdot (1, 0, 1) = (-1, 2, 1)$$

eine Linearkombination der Vektoren  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$ .

(b) Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ,  $\mathbf{v}_1 = (4, 5)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (3, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 1)$ ,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1$  und  $\lambda_3 = 6$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 &= 2 \cdot (4, 5) + (3, 1) + 6 \cdot (0, 1) \\ &= (1, 3) + (3, 1) + (0, 6) \\ &= (4, 3) \end{aligned}$$

eine Linearkombination von  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  und  $\mathbf{v}_3$ .

**Definition 3.12.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$ . Dann nennen wir die Menge

$$\begin{aligned} \text{span}(U) &:= \{ \mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \text{ ist eine endliche Linearkombination von Vektoren aus } U \} \\ &= \{ \mathbf{v} \in V : \text{es existieren } r \in \mathbb{N}_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K} \text{ und } \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \in U \\ &\quad \text{mit } \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{u}_r \} \end{aligned}$$

die lineare Hülle der Menge  $U$  von Vektoren. Die lineare Hülle der leeren Menge ergibt durch die Definition der leeren Summe das Nullelement von  $V$ , d. h.

$$\text{span}(\emptyset) = \{ \mathbf{0} \}.$$

Für eine endliche Menge von Vektoren  $\{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t \} \subseteq V$  schreiben wir vereinfachend  $\text{span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t)$  anstelle von  $\text{span}(\{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t \})$ .

**Lemma 3.13.** *Für jede Menge  $U \subseteq V$  von Vektoren eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$  ist die lineare Hülle  $\text{span}(U)$  ein Unterraum von  $V$  und wir sagen  $\text{span}(U)$  wird von  $U$  aufgespannt oder erzeugt.*

BEWEIS. Da  $\emptyset$  eine endliche Teilmenge von  $U$  ist, ist die leere Linearkombination in  $\text{span}(U)$  enthalten und somit gilt  $\mathbf{0} \in \text{span}(U)$ . Insbesondere ist  $\text{span}(U)$  also nicht leer. Wir zeigen, dass die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 3.8 für  $W = \text{span}(U)$  erfüllt sind.

Für (i) seien  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \text{span}(U)$  beliebig. Somit gibt es endliche Linearkombinationen von Vektoren aus  $U$ , die  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  darstellen. D. h. es gibt  $r, s \in \mathbb{N}_0$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_s \in \mathbb{K}$ ,  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \in U$  und  $\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_s \in U$  sodass

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{u}_r \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \lambda'_1 \mathbf{u}'_1 + \dots + \lambda'_s \mathbf{u}'_s.$$

Folglich ist

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{u}_r + \lambda'_1 \mathbf{u}'_1 + \dots + \lambda'_s \mathbf{u}'_s$$

und somit ist  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  als endliche Linearkombination von Vektoren aus  $U$  darstellbar. Wegen der Definition von  $\text{span}(U)$  ist deswegen auch  $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \text{span}(U)$ .

Für die Eigenschaft (ii) sei nun  $\lambda \in \mathbb{K}$  beliebig und  $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{u}_r \in \text{span}(U)$ . In diesem Fall gilt

$$\lambda \mathbf{v} = \lambda \cdot (\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{u}_r) = (\lambda \lambda_1) \mathbf{u}_1 + \dots + (\lambda \lambda_r) \mathbf{u}_r.$$

Folglich ist  $\lambda \mathbf{v}$  eine endliche Linearkombination von Vektoren aus  $U$  und wir haben gezeigt  $\lambda \mathbf{v} \in \text{span}(U)$ .  $\square$

**Beispiel 3.14.** (a) Wir betrachten den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}[X]$  der Polynome über  $\mathbb{R}$ . Sei  $f = X$  und  $g = X^2$ . Dann ist

$$\text{span}(f, g) = \{aX^2 + bX : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Setzt man nun noch  $h = 1$  ( $h = X^0$ ), so ist

$$\text{span}(f, g, h) = \{aX^2 + bX + c : a, b, c \in \mathbb{R}\},$$

der Raum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2.

(b) Seien  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ . Dann ist

$$-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = (0, 0, 2),$$

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = (0, 2, 0)$$

und

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = (2, 0, 0).$$

Nach Lemma 3.13 sind alle Linearkombinationen der Vektoren  $(0, 0, 2)$ ,  $(0, 2, 0)$  und  $(2, 0, 0)$  wieder Elemente von  $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ . Für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  ist

$$(x, y, z) = \frac{x}{2} \cdot (2, 0, 0) + \frac{y}{2} \cdot (0, 2, 0) + \frac{z}{2} \cdot (0, 0, 2) \in \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3).$$

Also ist  $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \mathbb{R}^3$ .

Die folgende Definition ist zentral in der Linearen Algebra.

**Definition 3.15.** Es sei  $r \geq 1$  und  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{K}$ . Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V$  heißen linear unabhängig, falls die einzigen Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  mit

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

die Skalare  $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$  sind, wenn also aus der Gleichung

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

folgt, dass  $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$  gilt. Falls  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  nicht linear unabhängig sind, so nennt man die Vektoren linear abhängig.

Eine unendliche Menge von Vektoren  $U \subseteq V$  ist linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge von  $U$  linear unabhängig ist.

Man beachte, dass für beliebige Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V$  die Gleichung

$$0\mathbf{v}_1 + \dots + 0\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

gilt. Die Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  sind genau dann linear unabhängig, wenn das die einzige Möglichkeit ist,  $\mathbf{0} \in V$  als Linearkombination der Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  zu schreiben.

**Beispiel 3.16.** Betrachte die Vektoren  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ . Seien  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  so gewählt, dass

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

gilt. Es gilt also auch

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit löst  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  das homogene lineare Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix die Spalten  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  und  $\mathbf{v}_3$  hat, also das Gleichungssystem

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 0$$

$$0x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 0$$

$$1x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 0.$$

Wir führen das Gauß-Jordan-Verfahren mit der erweiterten Koeffizientenmatrix durch

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow[\leftarrow_+]{\cdot(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow_+]{\cdot(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \quad | : 4 \\
 & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow_+]{\cdot(-2)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow_+]{\cdot(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
 & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Insbesondere hat das Gleichungssystem nur die eine Lösung  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ . Es folgt  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  sind die einzigen Koeffizienten, so dass  $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ . Damit sind  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  und  $\mathbf{v}_3$  linear unabhängig.

**Beispiel 3.17.** Wir betrachten nun die Vektoren  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$  und  $\mathbf{v}_3 = (3, 1, 2)$  in  $\mathbb{R}^3$ . Wieder wollen wir feststellen, ob die Vektoren linear unabhängig sind. Wir suchen also Koeffizienten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  mit

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

und wollen dabei feststellen, ob die  $\lambda_i$  alle 0 sein müssen (in diesem Fall sind die Vektoren linear unabhängig) oder nicht (in diesem Fall sind die Vektoren linear abhängig).

Wir suchen also Lösungen für das lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix und führen das Gauß-Verfahren durch:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow_+]{\cdot(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow_+]{\cdot(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Wir sehen sofort, dass  $x_3$  eine freie Variable ist und dass das Gleichungssystem daher unendlich viele Lösungen hat. Insbesondere hat das Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung. Damit ist der Nullvektor eine nichttriviale Linearkombination der Vektoren  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  und  $\mathbf{v}_3$ . Das zeigt, dass die Vektoren linear abhängig sind.

Wir können eine solche Lösung auch durch Rückwärtseinsetzen berechnen. In diesem Beispiel erhält man die Lösungsmenge

$$\{(-2t, -t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Für  $t = 1$  erhält man die explizite Lösung  $(-2, -1, 1)$  und  $-2 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$  ist eine nichttriviale Linearkombination die den Nullvektor erzeugt.

**Beispiel 3.18.** Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ,  $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$  und  $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$ . Um festzustellen, ob diese Vektoren linear unabhängig sind, wenden wir wieder das Gauß-Verfahren auf die erweiterte Koeffizientenmatrix des sich ergebenden Gleichungssystems

an. Dabei ist zu beachten, dass wir in  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  rechnen. Deswegen multiplizieren wir im ersten Schritt die erste Zeile mit 2, da 2 das multiplikative Inverse von 2 in  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  ist, und addieren im zweiten Schritt die erste Zeile auf die zweite, da 1 das additiv Inverse von 2 ist:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \cdot 2 &\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} + \\ &\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Wir sehen, dass das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Damit hat das Gleichungssystem nur die triviale Lösung. Also sind die Vektoren  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  und  $\mathbf{v}_3$  linear unabhängig.

**Beispiel 3.19.** Wir betrachten den Vektorraum  $\mathbb{R}[X]$  der Polynome über dem Körper der reellen Zahlen. Dann sind die Polynome  $1$ ,  $X$ ,  $X^2$  und  $X^3$  linear unabhängig. Damit

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 X + \lambda_3 X^2 + \lambda_4 X^3$$

das Nullpolynom ergibt, müssen alle Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  gleich 0 sein.

Andererseits sind die Polynome  $p_1 = X$ ,  $p_2 = X^2$  und  $p_3 = X^2 - X$  linear abhängig. Es gilt nämlich

$$-p_1 + p_2 - p_3 = -X + X^2 - (X^2 - X) = 0.$$

Es gibt also eine nicht-triviale Linearkombination der Polynome  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$ , die gleich dem Nullpolynom ist.

**Bemerkung 3.20.**

- Sind  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  Elemente eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraumes  $V$  und gilt  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j$  für zwei verschiedene  $1 \leq i < j \leq r$ , tritt also einer der Vektoren in der Liste  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  zweimal auf, so sind die Vektoren linear abhängig. In diesem Fall ist nämlich  $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$  eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors.

- Sind  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V$  und gibt es ein  $i \in [r]$  mit  $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ , so sind die Vektoren ebenfalls linear abhängig. In diesem Fall ist  $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$  eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors.
- Ein einzelner Vektor  $\mathbf{v} \in V$  ist genau dann linear unabhängig, wenn  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  gilt.

Wir beschließen diese Kapitel mit einer praktischen Charakterisierung linear unabhängiger Vektoren.

**Lemma 3.21.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und seien  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V$ . Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- Die Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  sind linear abhängig.
- Einer der Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  ist eine Linearkombination der anderen.

BEWEIS. Wir nehmen zunächst an, dass einer der Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  eine Linearkombination der anderen ist. Nach eventueller Umbenennung der Vektoren können wir annehmen, dass  $\mathbf{v}_1$  eine Linearkombination der Vektoren  $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  ist. Es gibt also  $\lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  mit

$$\lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_1.$$

Also ist

$$-\mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

eine nicht-triviale Linearkombination, die den Nullvektor darstellt, da der Koeffizient vor  $\mathbf{v}_1$  gleich  $-1 \neq 0$  ist. Damit sind  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  linear abhängig.

Für die Hinrichtung nehmen wir an, dass  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  linear unabhängig sind. Dann gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ , die nicht alle 0 sind, so dass

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

gilt. Mindestens ein  $\lambda_i$  ist von 0 verschieden. Nach eventueller Umbenennung der Vektoren können wir annehmen, dass  $\lambda_1$  von 0 verschieden ist.

Es gilt

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 = (-\lambda_2) \mathbf{v}_2 + \dots + (-\lambda_r) \mathbf{v}_r.$$

Wegen  $\lambda_1 \neq 0$  können wir die Gleichung mit dem Inversen von  $\lambda_1$  multiplizieren und erhalten

$$\mathbf{v}_1 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{v}_2 + \dots + \frac{-\lambda_r}{\lambda_1} \mathbf{v}_r.$$

Damit ist  $\mathbf{v}_1$  eine Linearkombination von  $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ . □

### §3.3 BASEN VON VEKTORRÄUMEN

**Definition 3.22.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$ . Die Vektoren in  $U$  sind ein Erzeugendensystem von  $V$  (oder  $U$  erzeugt  $V$ ), falls

$$\text{span}(U) = V$$

gilt.

Die Vektoren in  $U$  sind eine Basis von  $V$ , falls sie linear unabhängig sind und  $V$  erzeugen.

**Beispiel 3.23.** Wir betrachten wieder die Vektoren  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$  und  $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 3)$  aus Beispiel 3.16. Wir wissen bereits, dass die Vektoren linear unabhängig sind. Um zu zeigen, dass die drei Vektoren auch den Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  erzeugen, müssen wir zeigen, dass für alle  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$  Skalare  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  existieren, so dass

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$$

gilt.

Wir müssen also das Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & b_2 \\ 1 & 0 & 3 & b_3 \end{array} \right)$$

lösen. Führen wir dieselben elementaren Zeilenumformungen wie in Beispiel 3.16 durch, so erhalten wir die eine Matrix der Form

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{array} \right),$$

mit gewissen reellen Zahlen  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems lautet also  $(c_1, c_2, c_3)$ . Damit gilt

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{b}.$$

Also erzeugen die Vektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  und  $\mathbf{v}_3$  den Vektorraum  $\mathbb{R}^3$ . Damit sind  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ .

**Lemma 3.24.** *Eine Menge von Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V$  bildet genau dann eine Basis des  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$ , wenn es für alle Vektoren  $\mathbf{w} \in V$  eindeutig bestimmte Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  mit*

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{w}$$

*gibt.*

**BEWEIS.** Wir nehmen zunächst an, dass  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  eine Basis von  $V$  bilden. Wegen  $\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) = V$  gibt es für jeden Vektor  $\mathbf{w} \in V$  Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ , sodass

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{w}$$

gilt. Angenommen, für einen Vektor  $\mathbf{w} \in V$  gibt es Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda'_1, \dots, \lambda'_r \in \mathbb{K}$  mit

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{w} = \lambda'_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda'_r \mathbf{v}_r.$$

Dann ist

$$(\lambda_1 - \lambda'_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (\lambda_r - \lambda'_r) \mathbf{v}_r = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Da die Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  linear unabhängig sind, folgt

$$(\lambda_1 - \lambda'_1) = \dots = (\lambda_r - \lambda'_r) = 0.$$

Also gilt  $\lambda_1 = \lambda'_1, \dots, \lambda_r = \lambda'_r$ . Das zeigt die Eindeutigkeit der Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ .

Nun nehmen wir an, dass für alle  $\mathbf{w} \in V$  eindeutig bestimmte Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  mit

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{w}$$

existieren. Dann ist insbesondere jeder Vektor  $\mathbf{w} \in V$  eine Linearkombination von  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ . Es gilt also  $V = \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$ . Ist nun  $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$ , so gilt

$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ , da die Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  eindeutig bestimmt sind. Damit sind die Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  linear unabhängig.  $\square$

**Beispiel 3.25.** Wir haben schon gesehen, dass die Vektoren  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$  und  $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 3)$  aus den Beispielen 3.16 und 3.23 eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  bilden. Wir wollen nun den Vektor  $(0, 2, 1)$  als Linearkombination von  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  und  $\mathbf{v}_3$  darstellen.

Das heißt, wir suchen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  mit

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = (0, 2, 1).$$

Wir müssen also das Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

lösen.

Wir führen dieselben elementaren Zeilenumformungen durch wie in Beispiel 3.16:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow[\leftarrow +]{\cdot(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array} \right) \quad | : 4 \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\leftarrow +} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\cdot(-1)} \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Damit ist  $\lambda_1 = -\frac{5}{4}$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$  und  $\lambda_3 = \frac{3}{4}$ . Also ist

$$-\frac{5}{4} \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_2 + \frac{3}{4} \mathbf{v}_3 = \left( -\frac{5}{4} \right) \cdot (1, 0, 1) + \frac{1}{2} \cdot (1, 1, 0) + \frac{3}{4} \cdot (1, 2, 3) = (0, 2, 1).$$

**Bemerkung 3.26.** Ist  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  eine Basis von  $V$ , so liefert diese Basis ein Koordinatensystem. Für jeden Vektor  $\mathbf{w} \in V$  sind die *Koordinaten* von  $\mathbf{w}$  bezüglich der Basis  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  die eindeutig bestimmten Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  mit

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{w}.$$

Die üblichen Koordinaten eines Vektors  $\mathbf{w} \in \mathbb{K}^n$  sind die Koordinaten bezüglich der *Standardbasis*  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ , wobei  $\mathbf{e}_i$  der Vektor ist, dessen  $i$ -te Komponente 1 ist, während alle anderen Komponenten 0 sind. Der Vektor  $\mathbf{e}_i$  ist der  $i$ -te *Einheitsvektor* von  $\mathbb{K}^n$ .

## §3.4 DIMENSION EINES VEKTORRAUMS

**Satz 3.27** (Basisergänzungssatz). *Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $\mathbb{K}$ . Weiter seien  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s \in V$ . Angenommen,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  sind linear unabhängig und die Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s$  erzeugen den Vektorraum  $V$ .*

*Falls  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  noch keine Basis von  $V$  bilden, so kann man  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  durch Hinzufügen von Vektoren aus  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s\}$  zu einer Basis von  $V$  ergänzen.*

BEWEIS. Wir haben nur dann etwas zu zeigen, wenn  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  noch keine Basis von  $V$  ist. In diesem Fall gilt  $s > 0$ , da  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  alleine noch nicht  $V$  erzeugen. Wir zeigen, dass es ein  $i \in \{1, \dots, s\}$  gibt, sodass die Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_i$  linear unabhängig sind. Wir können dann  $\mathbf{v}_{r+1}$  für  $\mathbf{w}_i$  schreiben, sodass wir nach Umnummerieren der Elemente von  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s\} \setminus \{\mathbf{w}_i\}$  eine Liste

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{s-1}$$

von Vektoren vorliegen haben, in der  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r+1}$  linear unabhängig sind und

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{s-1}$$

den Vektorraum  $V$  erzeugen. Der Satz folgt dann, indem man dieses Argument solange iteriert, bis die Vektoren  $\mathbf{v}_i$  am Anfang der Liste  $V$  erzeugen. Dieser Fall tritt spätestens dann ein, wenn in der Liste kein Vektor  $\mathbf{w}_j$  mehr auftritt.

Seien also  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  linear unabhängig mit

$$\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) \neq V.$$

Falls

$$\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s\} \subseteq \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$$

gilt, so sind auch alle Linearkombinationen von  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s$  in dem Unterraum  $\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$  enthalten. Damit gilt  $\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) = V$ , ein Widerspruch zu unserer Annahme. Also gibt es unter den Vektoren  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s$  mindestens einen, der keine Linearkombination von  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  ist. Sei  $\mathbf{w}_i$  ein solcher Vektor.

Wir zeigen, dass die Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_i$  linear unabhängig sind. Seien

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta \in \mathbb{K}$$

mit

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_r \mathbf{v}_r + \beta \mathbf{w}_i = 0.$$

Ist  $\beta = 0$ , so gilt

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_r \mathbf{v}_r = 0$$

und es folgt  $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ , da die Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  linear unabhängig sind.

Wir nehmen nun an, dass  $\beta$  von Null verschieden ist. In diesem Fall ist

$$-\beta \mathbf{w}_i = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_r \mathbf{v}_r$$

und damit

$$\mathbf{w}_i = \frac{-\alpha_1}{\beta} \mathbf{v}_1 + \cdots + \frac{-\alpha_r}{\beta} \mathbf{v}_r.$$

Das widerspricht aber unserer Annahme, dass  $\mathbf{w}_i$  keine Linearkombination von  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  ist. Es folgt, dass die Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  und  $\beta$  alle 0 sind. Damit sind  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_i$  linear unabhängig.  $\square$

In diesem Satz ist der Fall  $r = 0$  ausdrücklich nicht ausgeschlossen. Ist  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s$  ein Erzeugendensystem von  $V$ , so existiert eine Basis von  $V$ , die aus Vektoren aus der Menge  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s\}$  besteht.

Der Basisergänzungssatz zeigt insbesondere, dass jeder Vektorraum  $V$ , der die lineare Hülle von endlich vielen Vektoren ist, eine endliche Basis hat. Ein solcher Vektorraum heißt *endlich erzeugt*. Es gibt auch Vektorräume, die nicht endlich erzeugt sind, wie zum Beispiel der Vektorraum  $\mathbb{K}[X]$  aller Polynome über einem Körper  $\mathbb{K}$ . Man kann zeigen, dass auch jeder Vektorraum, der nicht endlich erzeugt ist, eine (unendliche) Basis hat. Dafür ist allerdings das Auswahlaxiom nötig (siehe Axiome der Mengenlehre) und wir werden in dieser Vorlesung darauf nicht näher eingehen.

**Korollar 3.28.** *Sind  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  und  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s$  Basen von  $V$ , so gilt  $r = s$ .*

BEWEIS. Ist  $V = \{\mathbf{0}\}$ , so gilt  $r = s = 0$ . Enthält  $V$  mehr als nur den Nullvektor  $\mathbf{0}$ , so müssen  $r$  und  $s$  beide mindestens 1 sein.

Wir tauschen nun Schrittweise die Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  gegen Elemente von

$$\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s\}$$

aus, wobei wir in jedem Schritt einen Vektor  $\mathbf{v}_i$  entfernen und mindestens einen Vektor  $\mathbf{w}_j$  hinzufügen. Das machen wir so, dass wir in jedem Schritt eine Basis vorliegen haben.

Im ersten Schritt betrachten wir die Vektoren

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r-1}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s.$$

Dabei sind  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r-1}$  linear unabhängig und

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r-1}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s$$

erzeugen  $V$ . Also können wir  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r-1}$  nach dem Basisergänzungssatz durch Hinzunahme von Vektoren aus  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s\}$  zu einer Basis von  $V$  ergänzen. Das liefert eine Basis  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r-1}, \mathbf{w}_{i_1}, \dots, \mathbf{w}_{i_k}$  von  $V$ . Hierbei ist  $k \geq 1$ , da aus der linearen Unabhängigkeit von  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r-1}, \mathbf{v}_r$  folgt  $\mathbf{v}_r \notin \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r-1})$  und somit  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r-1}$  nicht bereits eine Basis von  $V$  bilden.

Im nächsten Schritt ersetzen wir den Vektor  $\mathbf{v}_{r-1}$  durch Vektoren aus

$$\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s\} \setminus \{\mathbf{w}_{i_1}, \dots, \mathbf{w}_{i_k}\}$$

und erhalten wieder eine Basis von  $V$ . Wir setzen dieses Verfahren fort, bis jeder der Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  durch einen oder mehrere Vektoren aus  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s\}$  ersetzt wurde. Da in jedem Schritt neue Vektoren aus  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s\}$  gewählt werden, folgt  $s \geq r$ .

Vertauscht man die Rollen der  $\mathbf{v}_i$  und  $\mathbf{w}_j$ , so ergibt sich  $r \geq s$ . Das zeigt  $r = s$ .  $\square$

Dieses Korollar rechtfertigt die folgende Definition.

**Definition 3.29.** Sei  $V$  ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Körper  $\mathbb{K}$ . Dann ist die Dimension von  $V$  die eindeutig bestimmte Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$ , sodass jede Basis von  $V$  genau  $n$  Vektoren umfasst. Wir schreiben für die Dimension von  $V$  dann  $\dim(V)$ .

Vektorräume  $V$  die nicht endlich erzeugt sind, sind unendlich-dimensional und wir schreiben  $\dim(V) = \infty$ .

**Beispiel 3.30.** (a) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  hat der  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathbb{K}^n$  die Dimension  $n$ .

Die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  (siehe Bemerkung 3.26) bilden nämlich eine Basis. Daraus folgt, dass auch alle anderen Basen von  $\mathbb{K}^n$  genau  $n$  Elemente haben.

Wir können auch den 0-dimensionalen Vektorraum  $\mathbb{K}^0$  betrachten: Er besteht aus allen Tupeln der Länge 0 von Elementen von  $\mathbb{K}$ . Allerdings gibt es nur ein 0-Tupel, das leere Tupel  $()$ . Also hat  $\mathbb{K}^0$  nur ein Element, nämlich das leere Tuple, welches wir mit  $\mathbf{0} = ()$  bezeichnen. Der einelementige Vektorraum  $\{\mathbf{0}\}$  über  $\mathbb{K}$  hat die Dimension 0. Die leere Menge von Vektoren ist nämlich eine Basis. Sie ist sicherlich linear unabhängig und die einzig mögliche Linearkombination, die leere Linearkombination, hat den Wert  $\mathbf{0}$ .

(b) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem in Variablen  $x_1, \dots, x_6$  mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

Die erweiterten Koeffizientenmatrix hat bereits Zeilenstufenform und wir führen das Gauß-Jordan-Verfahren durch, um die Matrix auf reduzierte Zeilenstufenform zu bringen:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{\left. \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right\}} \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{\left. \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right\} \cdot (-2)} \\ & \longrightarrow \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Nun lesen wir die Lösung ab, wobei wir für die freien Variablen  $x_3$ ,  $x_4$  und  $x_6$  die Parameter  $r$ ,  $s$  und  $t$  einsetzen. Aus der letzten Zeile/Gleichung ergibt sich

$$x_6 = t \quad \text{und} \quad x_5 = 0 + 3x_6 \Rightarrow x_5 = 3t.$$

Somit folgt wegen der zweiten Gleichung

$$x_4 = s, \quad x_3 = r \quad \text{und} \quad x_2 = 0 - 3x_3 - 2x_4 \Rightarrow x_2 = -3r - 2s$$

und schließlich impliziert die erste Gleichung

$$x_1 = 0 + 3x_3 + 5x_4 + x_6 \Rightarrow x_1 = 3r + 5s + t$$

für  $r, s, t \in \mathbb{R}$ .

Diese allgemeine Lösung können wir auch mit Hilfe von Vektoren wie folgt schreiben:

$$(x_1, \dots, x_6) = r \cdot (3, -3, 1, 0, 0, 0) + s \cdot (5, -2, 0, 1, 0, 0) + t \cdot (1, 0, 0, 0, 3, 1).$$

Offenbar ist jede Lösung des Gleichungssystems eine Linearkombination der Vektoren  $\mathbf{v}_1 = (3, -3, 1, 0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (5, -2, 0, 1, 0, 0)$  und  $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0, 0, 3, 1)$ , d. h. für die Lösungsmenge  $L$  des homogenen Gleichungssystems gilt  $L = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ . Insbesondere sind für jede gegebene Lösung  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_6) \in L$  die Skalare  $r_{\mathbf{u}}, s_{\mathbf{u}}, t_{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}$  durch  $\mathbf{u}$  eindeutig bestimmt, da  $r_{\mathbf{u}} = u_3$ ,  $s_{\mathbf{u}} = u_4$  und  $t_{\mathbf{u}} = u_6$  gilt. Also bilden  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  eine Basis des Lösungsraumes des Gleichungssystems.

Dieses Beispiel zeigt, wie das Gauß-Jordan-Verfahren benutzt werden kann, um eine Basis des Lösungsraumes eines homogenen Gleichungssystems zu bestimmen: Man berechne zunächst die reduzierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems, führe für jede freie Variable einen Parameter ein und gebe die Lösung dann wie oben in Vektordarstellung an. Die Vektoren, die dabei auftreten, sind bereits eine Basis des Lösungsraumes des Gleichungssystems. Man beachte, dass die Dimension des Lösungsraumes genau die Anzahl der freien Variablen ist.

**Korollar 3.31.** *Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n$  und seien  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V$  linear unabhängig. Dann gilt  $r \leq n$ .*

BEWEIS. Sei  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$  eine Basis  $V$ . Nach dem Basisergänzungssatz können wir  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  durch Hinzunahme von Vektoren aus  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$  zu einer Basis von  $V$  ergänzen. Diese Basis hat mindestens  $r$  Elemente. Da aber alle Basen von  $V$  dieselbe Länge haben, folgt  $r \leq n$ .  $\square$

**Korollar 3.32.** *Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n$  und sei  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s$  ein Erzeugendensystem von  $V$ . Dann gilt  $n \leq s$ .*

BEWEIS. Nach dem Basisergänzungssatz hat  $V$  eine Basis, die aus Vektoren aus  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s$  besteht. Solch eine Basis hat höchstens  $s$  Elemente. Da aber alle Basen von  $V$  genau  $n$  Elemente haben, folgt  $n \leq s$ .  $\square$

**Korollar 3.33.** *Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n$  und seien  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i)  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  sind linear unabhängig,
- (ii)  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  erzeugen  $V$ .

BEWEIS. Angenommen  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  sind linear unabhängig. Nach dem Basisergänzungssatz können wir  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  durch Hinzunahme von Vektoren aus einem endlichen Erzeugendensystem zu einer Basis von  $V$  ergänzen. Diese Basis hat dann aber auch  $n$  Elemente. Also ist  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  bereits eine Basis von  $V$ .

Nun nehmen wir an, dass  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  den Vektorraum  $V$  erzeugen. Nach dem Basisergänzungssatz können wir eine Basis aus den Vektoren  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  auswählen, die dann aber auch  $n$  Elemente hat. Also ist  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  bereits eine Basis von  $V$ .  $\square$

**Satz 3.34.** *Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $U$  ein Unterraum von  $V$ . Dann ist  $U$  ebenfalls endlich erzeugt und die Dimension von  $U$  ist höchstens  $n$ . Ist die Dimension von  $U$  genau  $n$ , so gilt  $U = V$ .*

BEWEIS. Nach Korollar 3.31 gibt es in  $V$  keine Familien linear unabhängiger Vektoren mit mehr als  $n$  Elementen. Also gibt es auch in  $U$  keine Familien linear unabhängiger Vektoren mit mehr als  $n$  Elementen. Wir wählen  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \in U$  linear unabhängig, sodass  $r$  maximal ist. Ist  $r = n$ , so ist  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  nach Korollar 3.33 bereits ein Erzeugendensystem von  $V$ . Also ist in diesem Fall

$$V = \text{span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r) \subseteq U \subseteq V.$$

Damit gilt  $U = V$ .

Falls  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  kein Erzeugendensystem von  $U$  ist, so existiert ein Vektor

$$\mathbf{w} \in U \setminus \text{span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r).$$

Nachdem Basisergänzungssatz ist  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w}$  eine Basis von  $\text{span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w})$ . Insbesondere sind  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w}$  linear unabhängig, im Widerspruch zur maximalen Wahl von  $r$ . Also erzeugen  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  den Unterraum  $U$ . Insbesondere ist  $U$  endlich erzeugt und hat die Dimension  $r \leq n$ .  $\square$

**Beispiel 3.35.** Wir bestimmen sämtliche Unterräume von  $\mathbb{R}^2$ . Da  $\mathbb{R}^2$  die Dimension 2 hat, können die Unterräume nur die Dimensionen 0, 1 und 2 haben. Der einzige Unterraum der Dimension 0 ist der Raum  $\{(0, 0)\}$ . Unterräume der Dimension 1 bestehen aus allen Vielfachen eines Vektors  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Es handelt sich also um Geraden durch den

Nullpunkt. Alle Geraden durch  $(0, 0)$  sind eindimensionale Unterräume von  $\mathbb{R}^2$ . Es gibt nur einen Unterraum der Dimension 2, nämlich  $\mathbb{R}^2$  selber.

Die Unterräume von  $\mathbb{R}^3$  können die Dimensionen 0, 1, 2 und 3 haben. Der eindeutig bestimmte 0-dimensionale Unterraum ist die Menge  $\{(0, 0, 0)\}$ . Die 1-dimensionalen Unterräume sind Geraden durch  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ . Die 2-dimensionalen Unterräume sind Ebenen, die den Nullvektor  $\mathbf{0}$  enthalten. Der einzige 3-dimensionale Unterraum ist  $\mathbb{R}^3$  selber.

### §3.5 BESTIMMUNG VON BASEN

Der Basisergänzungssatz besagt unter anderem, dass wir aus einem endlichen Erzeugendensystem  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s$  eines Vektorraums  $V$  eine Basis des Vektorraums auswählen können. Dazu müssen wir nur solange linear unabhängige Vektoren aus dem Erzeugendensystem auswählen, bis wir keinen weiteren Vektor mehr finden, der von den bereits gewählten Vektoren linear unabhängig ist.

Allerdings ist das Überprüfen auf lineare Unabhängigkeit aufwendig. Wir diskutieren daher noch eine andere Methode, eine Basis eines Vektorraums zu finden, der durch ein Erzeugendensystem gegeben ist.

**Definition 3.36.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ . Der Zeilenraum von  $\mathbf{A}$  ist der von den Zeilen der Matrix  $\mathbf{A}$  erzeugte Unterraum von  $\mathbb{K}^n$ . Der Spaltenraum von  $\mathbf{A}$  ist der von den Spalten der Matrix  $\mathbf{A}$  erzeugte Unterraum von  $\mathbb{K}^m$ .

**Lemma 3.37.** Elementare Zeilenumformungen ändern nicht den Zeilenraum einer Matrix.

BEWEIS. Sei  $\mathbf{A}$  eine  $m \times n$ -Matrix über einem Körper  $\mathbb{K}$ . Es ist klar, dass die neuen Zeilen, die bei elementaren Zeilenumformungen von  $\mathbf{A}$  entstehen, Linearkombinationen der Zeilen von  $\mathbf{A}$  sind. Entsteht also die Matrix  $\mathbf{B}$  durch elementare Zeilenumformungen aus  $\mathbf{A}$ , so ist jede Zeile von  $\mathbf{B}$  im Zeilenraum von  $\mathbf{A}$  enthalten. Damit ist der Zeilenraum von  $\mathbf{B}$  eine Teilmenge des Zeilenraums von  $\mathbf{A}$ .

Andererseits lassen sich elementare Zeilenumformungen durch elementare Zeilenumformungen rückgängig machen. Damit lässt sich die Matrix  $\mathbf{B}$  durch elementare Zeilenumformungen in die Matrix  $\mathbf{A}$  überführen. Also ist der Zeilenraum von  $\mathbf{A}$  auch eine Teilmenge des Zeilenraums von  $\mathbf{B}$ . Damit stimmen die beiden Zeilenräume überein.  $\square$

Dieses Lemma gibt uns folgendes Verfahren, um Basen von Unterräumen zu bestimmen.

**Satz 3.38.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und seien  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{K}^n$ . Dann können wir eine Basis von  $\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  wie folgt bestimmen:

- (1) Schreibe die Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  als Zeilen einer  $m \times n$ -Matrix  $\mathbf{A}$  über  $\mathbb{K}$ . Der Raum  $\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  ist der Zeilenraum der Matrix  $\mathbf{A}$ .

- (2) Führe das Gauß-Verfahren durch, um die Matrix  $\mathbf{A}$  in eine Matrix  $\mathbf{B}$  in Zeilenstufenform zu überführen.
- (3) Die Zeilen der Matrix  $\mathbf{B}$ , die nicht nur Nullen enthalten, bilden eine Basis von  $\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ .

BEWEIS. Wir müssen nur zeigen, dass die von Null verschiedenen Zeilen von  $\mathbf{B}$  eine Basis des Zeilenraums von  $\mathbf{A}$  bilden. Nach Lemma 3.37 haben  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  denselben Zeilenraum. Der Zeilenraum von  $\mathbf{A}$  wird also von den Zeilen von  $\mathbf{B}$  erzeugt. Da die Nullzeilen von  $\mathbf{B}$  nichts zum Erzeugnis der Zeilen beitragen, erzeugen die von Null verschiedenen Zeilen bereits den ganzen Zeilenraum von  $\mathbf{B}$  und damit auch von  $\mathbf{A}$ .

Die von Null verschiedenen Zeilen von  $\mathbf{B}$  haben alle eine führende Eins und diese führenden Einsen stehen jeweils in verschiedenen Spalten. Seien  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r$  die entsprechenden Zeilenvektoren, wobei für  $1 \leq i < j \leq r$  die führende Eins in  $\mathbf{w}_i$  weiter links steht als in  $\mathbf{w}_j$ .

Angenommen die Vektoren  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r$  sind linear abhängig, dann gibt es nach Lemma 3.21 einen Vektor  $\mathbf{w}_i$ , der als Linearkombination der anderen Vektoren darstellbar ist, d. h. es gibt  $i \in [r]$  und Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  mit

$$\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \mathbf{w}_j + \sum_{j=i+1}^r \lambda_j \mathbf{w}_j.$$

Da  $\mathbf{w}_i$  nicht der Nullvektor ist, gibt es einen kleinsten Index  $k \neq i$  mit  $\lambda_k \neq 0$ . Alle Vektoren  $\mathbf{w}_j$  mit  $j > k$  haben ihre führende Eins weiter rechts als  $\mathbf{w}_k$ , also hat  $\mathbf{w}_i$  in der entsprechenden Spalte den Wert  $\lambda_k \neq 0$ , der nicht vor der führenden Eins von  $\mathbf{w}_i$  stehen kann. Somit folgt  $k > i$  und  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{i-1} = 0$ , d. h.

$$\mathbf{w}_i = \sum_{j=i+1}^r \lambda_j \mathbf{w}_j.$$

Da die führende Eins von  $\mathbf{w}_i$  aber weiter links steht als alle führenden Einsen der Vektoren  $\mathbf{w}_{i+1}, \dots, \mathbf{w}_r$  führt dies zu einem Widerspruch.

Das zeigt, dass die Zeilenvektoren  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r$  von  $\mathbf{B}$  linear unabhängig sind. Also bilden die von Null verschiedenen Zeilen von  $\mathbf{B}$  eine Basis des Zeilenraums von  $\mathbf{A}$ .  $\square$

**Beispiel 3.39.** Seien die Vektoren  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 1)$  und  $\mathbf{v}_3 = (0, 2, 2, -1)$  aus  $\mathbb{R}^4$  gegeben. Wir wollen eine Basis des von  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  und  $\mathbf{v}_3$  erzeugten Unterraums  $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  von  $\mathbb{R}^4$  bestimmen. Dazu schreiben wir die Vektoren als Zeilen einer

Matrix und führen das Gauß-Verfahren durch.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} &\xrightarrow[\leftarrow_+]{\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\leftarrow_+]{\cdot(-1)} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| : (-\frac{1}{2}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit bilden die Vektoren  $(1, 2, 3, 0)$  und  $(0, 1, 1, -\frac{1}{2})$  eine Basis des von  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  und  $\mathbf{v}_3$  erzeugten Unterraums von  $\mathbb{R}^4$ .

**Definition 3.40.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ . Der Zeilenrang von  $\mathbf{A}$  ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von  $\mathbf{A}$ . Der Spaltenrang von  $\mathbf{A}$  ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von  $\mathbf{A}$ .

**Lemma 3.41.** Der Spaltenrang einer Matrix  $\mathbf{A}$  ist die Dimension des Spaltenraums und der Zeilenrang ist die Dimension des Zeilenraums.

**BEWEIS.** Wir wissen bereits, dass man aus einem endlichen Erzeugendensystem eines Vektorraums eine Basis dieses Vektorraums auswählen kann. Sind  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  Elemente eines Vektorraums  $V$ , so können wir unter den Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  eine linear unabhängige Menge von Vektoren von maximaler Größe auswählen. Nach dem Basisergänzungssatz ist diese Menge von Vektoren eine Basis des von  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  erzeugten Unterraums von  $V$ .

Damit ist die Dimension von  $\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$  genau die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren unter den Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ . Das zeigt das Lemma sowohl für den Zeilenrang als auch für den Spaltenrang einer Matrix.  $\square$

Eines auf den ersten Blick vielleicht überraschendes Ergebnis der linearen Algebra ist die Tatsache, dass der Zeilenrang einer Matrix gleich dem Spaltenrang ist. Um das zu zeigen, betrachten wir im nächsten Kapitel strukturerhaltende Abbildungen zwischen Vektorräumen.



## Lineare Abbildungen

## §4.1 LINEARE ABBILDUNGEN UND MATRIZEN

**Definition 4.1.** Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über demselben Körper  $\mathbb{K}$ . Eine Abbildung  $f: V \rightarrow W$  heißt linear, falls für alle  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  und alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$
- (ii)  $f(\lambda\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v})$

Eine Abbildung  $f$  zwischen  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$  ist also linear, wenn sie mit den Operationen (Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar) in den Vektorräumen verträglich ist.

**Beispiel 4.2.** (a) Sei  $V = W = \mathbb{R}$ . Dann ist  $f: V \rightarrow W$  mit  $x \mapsto 3x$  eine lineare Abbildung: Für alle  $x, y \in V$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$f(x + y) = 3(x + y) = 3x + 3y = f(x) + f(y)$$

und

$$f(\lambda x) = 3\lambda x = \lambda \cdot (3x) = \lambda f(x).$$

(b) Sei  $V = \mathbb{R}^2$  und  $W = \mathbb{R}$ . Dann ist  $g: V \rightarrow W$  mit  $(x, y) \mapsto x + 3y$  eine lineare Abbildung.

(c) Sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $W = \mathbb{R}^2$ . Dann ist  $h: V \rightarrow W$  mit  $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, 2y - z)$  eine lineare Abbildung.

(d) Sei  $V = \mathbb{R}[X]$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Polynome in der Unbestimmten  $X$  und  $W = \mathbb{R}$ . Dann ist die Abbildung  $e: V \rightarrow W$  mit  $p \mapsto p(27)$ , wobei das Polynom  $p \in \mathbb{R}[X]$  auf den Wert  $p(27) \in \mathbb{R}$  der Polynomfunktion abgebildet wird, eine lineare Abbildung. Seien nämlich  $p, q \in \mathbb{R}[X]$ . Dann ist

$$e(p + q) = (p + q)(27) = p(27) + q(27) = e(p) + e(q).$$

Analog ist  $e(\lambda p) = (\lambda p)(27) = \lambda \cdot p(27) = \lambda \cdot e(p)$ .

Die wichtigsten Beispiele für lineare Abbildungen liefert die Multiplikation von Matrizen mit Vektoren. Dazu erinnern wir uns zunächst an die Matrizenmultiplikation  $\cdot: \mathbb{K}^{\ell \times m} \times \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{\ell \times n}$  für Matrizen  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{\ell \times m}$  und  $\mathbf{B} = (b_{jk}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$  definiert durch

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (c_{ik}) \in \mathbb{K}^{\ell \times n} \quad \text{mit} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} \quad \text{für alle } i \in [\ell] \text{ und } k \in [n]$$

(siehe Definition 1.12).

Die Abbildungen  $f$ ,  $g$  und  $h$  aus Beispiel 4.2 können mithilfe der Matrizenmultiplikation dargestellt werden.

**Beispiel 4.3.** (a) Der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$  ist eindimensional und wir betrachten die  $1 \times 1$ -Matrix  $\mathbf{A} = (3) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ . Dann entspricht die Abbildung  $f$  aus Beispiel 4.2 (a) der Multiplikation  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  für  $\mathbf{x} = (x) \in \mathbb{R}^1$ .  
 (b) Ganz analog entspricht die Abbildung  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  aus Beispiel 4.2 (b) der Multiplikation  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$  für

$$\mathbf{B} = (1 \ 3) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1},$$

da dann  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = x + 3y$ . Hierbei fassen wir die Vektoren  $\mathbf{x}$  des  $\mathbb{R}^2$  als  $2 \times 1$ -Matrizen auf, d. h. als Spaltenvektoren) und nicht als Zeilenvektoren wie zuvor.

(c) Genauso entspricht  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  aus Beispiel 4.2 (c) der Multiplikation  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x}$  für

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1},$$

wodurch der Spaltenvektor  $\mathbf{x}$  in den Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} x + y + z \\ 2y - z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$$

überführt wird.

**Bemerkung 4.4.** Da  $\mathbb{K}^{n \times 1}$ ,  $\mathbb{K}^n$  und  $\mathbb{K}^{1 \times n}$  isomorph sind, werden wir in Zukunft, wenn es vom Kontext klar ist, auch für Spaltenvektoren einfach  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$  anstelle von  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^{n \times 1}$  schreiben.

Wie man leicht nachrechnet ist die Multiplikation einer festen Matrix mit (Spalten)vektoren eine lineare Abbildung.

**Lemma 4.5.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ . Dann ist die Abbildung  $f_{\mathbf{A}}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  gegeben durch  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$  linear.

BEWEIS. Sei  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$  gegeben und seinen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

und  $\lambda \in \mathbb{K}$  beliebig. Wir betrachten zuerst  $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ . Aus der Definition der Abbildung  $f_{\mathbf{A}}$  und der Definition der Matrizenmultiplikation ergibt sich

$$\begin{aligned}
 f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot (x_j + y_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} \cdot (x_j + y_j) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + \sum_{j=1}^n a_{1j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j + \sum_{j=1}^n a_{mj}y_j \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}y_j \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y} \\
 &= f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) + f_{\mathbf{A}}(\mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

Genauso erhalten wir auch die zweite geforderte Eigenschaft der Linearität

$$\begin{aligned}
 f_{\mathbf{A}}(\lambda\mathbf{x}) &= \mathbf{A} \cdot (\lambda\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot (\lambda x_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} \cdot (\lambda x_j) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda \cdot \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \lambda \cdot \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} \\
 &= \lambda \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} = \lambda \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}).
 \end{aligned}$$

□

Die wichtige Umkehrung des Lemmas besagt, dass jede lineare Abbildung  $f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$  als Matrizenmultiplikation darstellbar ist.

**Satz 4.6.** *Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$  eine lineare Abbildung. Dann existiert eine Matrix  $\mathbf{A}_f \in \mathbb{K}^{m \times n}$ , so dass für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$  gilt*

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_f \mathbf{x}.$$

*Darüberhinaus ist die Matrix  $\mathbf{A}_f$  eindeutig bestimmt und für  $j \in [n]$  ist die  $j$ -te Spalte von  $\mathbf{A}_f$  der Vektor  $f(\mathbf{e}_j) \in \mathbb{K}^m$ , wobei  $\mathbf{e}_j$  der  $j$ -te Einheitsvektor von  $\mathbb{K}^n$  ist.*

BEWEIS. Für jedes  $j \in [n]$  und den  $j$ -ten Einheitsvektor  $\mathbf{e}_j \in \mathbb{K}^n$  sei

$$f(\mathbf{e}_j) = \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}.$$

Insbesondere ist  $\mathbf{a}_j$  die  $j$ -te Spalte der Matrix  $\mathbf{A}_f$ . Für alle

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

gilt

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j.$$

Wegen der Linearität von  $f$  gilt somit

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n) = x_1 f(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n f(\mathbf{e}_n) = x_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n.$$

Auf der anderen Seite gilt auch

$$\mathbf{A}_f \mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n,$$

da  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  die Spalten von  $\mathbf{A}_f$  sind. Somit folgt  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_f \mathbf{x}$ , d. h. die lineare Abbildung  $f$  entspricht der Multiplikation mit der Matrix  $\mathbf{A}_f$ .

Für die Eindeutigkeit sei  $\mathbf{B}$  eine Matrix mit  $\mathbf{B}\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ . Es folgt unmittelbar, dass  $\mathbf{B}$  eine  $m \times n$ -Matrix ist. Für den  $j$ -ten Einheitsvektor  $\mathbf{e}_j \in \mathbb{K}^n$  ergibt die Matrizenmultiplikation, dass  $\mathbf{B}\mathbf{e}_j$  die  $j$ -te Spalte von  $\mathbf{B}$  ist. Auf der anderen Seite gilt  $\mathbf{B}\mathbf{e}_j = f(\mathbf{e}_j) = \mathbf{a}_j$ . Somit ist  $\mathbf{a}_j$  die  $j$ -te Spalte von  $\mathbf{B}$  und es folgt  $\mathbf{B} = \mathbf{A}_f$ , wodurch die Eindeutigkeit gezeigt ist.  $\square$

Der Beweis dieses Satzes zeigt, dass man eine lineare Abbildung  $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  bereits dann vollständig „kennt“, wenn man weiß, auf welche Vektoren die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{K}^n$  abgebildet werden. Dasselbe geht für jede Basis des Definitionsbereichs einer linearen Abbildung:

Sei  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$  und sei  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  eine Basis von  $V$ . Ist  $\mathbf{v} \in V$ , dann existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  mit  $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n$ . Es gilt nun

$$f(\mathbf{v}) = f(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n) = \lambda_1 f(\mathbf{v}_1) + \cdots + \lambda_n f(\mathbf{v}_n).$$

Also ist  $f$  durch die Bilder  $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)$  der Basisvektoren eindeutig bestimmt.

Der folgende Satz zeigt, dass die Multiplikation von Matrizen der Komposition linearer Abbildungen entspricht.

**Satz 4.7.** Für einen Körper  $\mathbb{K}$  seien  $f: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^\ell$  und  $g: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  lineare Abbildungen mit den dazu gehörenden Matrizen  $\mathbf{A}_f \in \mathbb{K}^{\ell \times m}$ ,  $\mathbf{A}_g \in \mathbb{K}^{m \times n}$  (siehe Satz 4.6). Dann gilt für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$  die Gleichung

$$(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})) = (\mathbf{A}_f \mathbf{A}_g) \mathbf{x}.$$

Die Multiplikation von Matrizen entspricht also der Komposition linearer Abbildungen.

BEWEIS. Der Satz ist eine direkte Konsequenz des Assoziativgesetzes der Matrizenmultiplikation (siehe Satz 1.13). Wegen dem Assoziativgesetz gilt

$$(\mathbf{A}_f \mathbf{A}_g) \mathbf{x} = \mathbf{A}_f (\mathbf{A}_g \mathbf{x}).$$

Da  $\mathbf{A}_g$  der Abbildung  $g$  entspricht (siehe Satz 4.6) folgt

$$\mathbf{A}_f (\mathbf{A}_g \mathbf{x}) = \mathbf{A}_f \cdot g(\mathbf{x})$$

und da  $\mathbf{A}_f$  der Abbildung  $f$  entspricht, erhalten wir weiter

$$\mathbf{A}_f \cdot g(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$$

und der Satz folgt. □

#### §4.2 DIMENSIONSFORMEL

**Definition 4.8.** Sei  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen. Der Kern von  $f$  ist die Menge

$$\ker(f) := \{\mathbf{v} \in V : f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \subseteq V.$$

Das Bild von  $f$  ist die Menge

$$\operatorname{im}(f) := \{f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\} \subseteq W.$$

Man beachte, dass der Kern das Urbild des Nullvektors aus dem Bildbereich ist und, dass die Definition des Bildes einer linearen Abbildung einfach die übliche Definition des Bildes einer Abbildung ist. Außerdem folgt direkt aus der Definition, dass für jede lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  immer  $\operatorname{im}(f) \neq \emptyset$  gilt, da jeder Vektorraum  $V$  mindestens einen Vektor (nämlich den Nullvektor) enthalten muss und somit  $f(\mathbf{0}) \in \operatorname{im}(f)$  folgt. Des Weiteren ist auch der Kern einer linearen Abbildung nichtleer, da der Nullvektor von  $V$  im Kern von  $f$  liegen muss, wie man durch

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0}) \quad \implies \quad \mathbf{0} = f(\mathbf{0})$$

einsieht. Hierbei ist zu beachten, dass in  $\mathbf{0} = f(\mathbf{0})$  der Nullvektor auf der linken Seite in  $W$  liegt, während das Argument von  $f$  der Nullvektor in  $V$  ist.

**Beispiel 4.9.** Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Wir können das Gleichungssystem auch mithilfe der Matrizenmultiplikation in der Form

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In Matrizenschreibweise lautet das Gleichungssystem also

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schreiben wir  $f_{\mathbf{A}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  für die lineare Abbildung

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax},$$

so lautet das lineare Gleichungssystem  $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ . Wenn wir ein lineares Gleichungssystem lösen, bestimmen wir also das Urbild eines Vektors unter einer linearen Abbildung. Da  $\ker(f_{\mathbf{A}})$  das Urbild vom Nullvektor ist ist die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 0 \\3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0\end{aligned}$$

genau der Kern der linearen Abbildung  $f_{\mathbf{A}}$ .

Der Spaltenraum der Matrix  $\mathbf{A}$ , also der Raum der Linearkombinationen der Spalten von  $\mathbf{A}$ , ist genau das Bild der linearen Abbildung  $f_{\mathbf{A}}$ . Die Frage, ob das lineare Gleichungssystem  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  lösbar ist, ist äquivalent zu der Frage, ob  $\mathbf{b}$  im Bild der linearen Abbildung  $f_{\mathbf{A}}$  liegt.

**Lemma 4.10.** *Sei  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen. Dann ist  $\ker(f)$  ein Unterraum von  $V$  und  $\text{im}(f)$  ein Unterraum von  $W$ .*

BEWEIS. Wir hatten bereits gesehen, dass  $\ker(f)$  und  $\operatorname{im}(f)$  nichtleer sind und wir brauchen nur jeweils die lineare Struktur (Bedingungen (i) und (ii) in Definition 3.8) überprüfen.

Seien  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  Elemente des Kerns von  $f$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann gilt wegen der Linearität von  $f$

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

und somit ist  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  ebenfalls im Kern von  $f$ . Außerdem folgt aus der Linearität von  $f$  auch

$$f(\lambda\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Damit ist also auch  $\lambda\mathbf{v}$  im Kern von  $f$ .

Seien nun  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  im Bild von  $f$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann existieren  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  mit  $f(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$  und  $f(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$  und die Linearität von  $f$  ergibt

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

Damit ist auch  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  im Bild von  $f$ . Außerdem gilt  $\lambda\mathbf{x} = \lambda f(\mathbf{u}) = f(\lambda\mathbf{u})$  und somit ist auch  $\lambda\mathbf{x}$  im Bild von  $f$ .  $\square$

Da der Kern und das Bild einer linearen Abbildung Unterräume sind, haben sie folglich auch eine Dimension und es gilt die elegante Dimensionsformel.

**Satz 4.11** (Dimensionsformel). *Sei  $V$  ein endlich erzeugter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $W$  ein beliebiger  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann ist der Untervektorraum  $\operatorname{im}(f) \subseteq W$  endlich erzeugt und es gilt*

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(V). \quad (4.1)$$

BEWEIS. Als Unterraum von  $V$  ist nach Satz 3.34 der Kern  $\ker(f)$  ebenfalls endlich erzeugt und damit endlich-dimensional. Wir wählen eine Basis  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  von  $\ker(f)$ . Da  $V$  endlich erzeugt ist, können wir  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  nach dem Basisergänzungssatz (Satz 3.27) durch Hinzunahme von endlich vielen Vektoren zu einer Basis

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s$$

von ganz  $V$  ergänzen. Es gilt also

$$\dim(V) = r + s \quad \text{und} \quad r = \dim(\ker(f)). \quad (4.2)$$

Wir zeigen nun, dass  $f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_s)$  eine Basis von  $\operatorname{im}(f)$  ist. Zunächst weisen wir nach, dass  $f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_s)$  den Unterraum  $\operatorname{im}(f)$  erzeugt, d. h.

$$\operatorname{im}(f) = \operatorname{span}(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_s)). \quad (4.3)$$

Offensichtlich gilt  $\operatorname{span}(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_s)) \subseteq \operatorname{im}(f)$  und wir müssen nur die umgekehrte Inklusion zeigen.

Sei also  $\mathbf{w} \in \text{im}(f)$  beliebig. Dann existiert  $\mathbf{v} \in V$  mit  $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$  und es existieren Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_{r+s} \in \mathbb{K}$  mit

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{v}_r + \lambda_{r+1} \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_{r+s} \mathbf{u}_s.$$

Wegen der Linearität von  $f$  und da die Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  im Kern von  $f$  liegen gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= f(\mathbf{v}) \\ &= \lambda_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + \lambda_r f(\mathbf{v}_r) + \lambda_{r+1} f(\mathbf{u}_1) + \dots + \lambda_{r+s} f(\mathbf{u}_s) \\ &= \lambda_1 \mathbf{0} + \dots + \lambda_r \mathbf{0} + \lambda_{r+1} f(\mathbf{u}_1) + \dots + \lambda_{r+s} f(\mathbf{u}_s) \\ &= \lambda_{r+1} f(\mathbf{u}_1) + \dots + \lambda_{r+s} f(\mathbf{u}_s). \end{aligned}$$

Somit ist der Vektor  $\mathbf{w}$  eine Linearkombination der Vektoren  $f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_s)$ , d. h. es gilt  $\mathbf{w} \in \text{span}(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_s))$ . Da  $\mathbf{w} \in \text{im}(f)$  beliebig gewählt war, ist folglich  $\text{im}(f) \subseteq \text{span}(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_s))$  und mit dem bereits gezeigten ergibt sich (4.3).

Als nächstes zeigen wir, dass die Vektoren  $f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_s)$  linear unabhängig sind. Angenommen

$$\mu_1 f(\mathbf{u}_1) + \dots + \mu_s f(\mathbf{u}_s) = \mathbf{0} \quad (4.4)$$

für Skalare  $\mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{K}$ . Zusammen mit der Linearität von  $f$  folgt

$$f(\mu_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \mu_s \mathbf{u}_s) = \mu_1 f(\mathbf{u}_1) + \dots + \mu_s f(\mathbf{u}_s) = \mathbf{0}$$

und somit liegt der Vektor  $\mu_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \mu_s \mathbf{u}_s$  im Kern von  $f$ . Da  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  eine Basis von  $\ker(f)$  ist, gibt es also Skalare  $\mu'_1, \dots, \mu'_r \in \mathbb{K}$  mit

$$\mu_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \mu_s \mathbf{u}_s = \mu'_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \mu'_r \mathbf{v}_r.$$

Damit folgt

$$-\mu'_1 \mathbf{v}_1 - \dots - \mu'_r \mathbf{v}_r + \mu_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \mu_s \mathbf{u}_s = \mathbf{0}$$

und da die Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s$  linear unabhängig sind, folgt daraus

$$-\mu'_1 = \dots = -\mu'_r = \mu_1 = \dots = \mu_s = 0.$$

Insbesondere sind also  $\mu_1, \dots, \mu_s$  alle Null und mit Blick auf (4.4) zieht dies die lineare Unabhängigkeit von  $f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_s)$  nach sich. Also ist  $\dim(\text{im}(f)) = s$  und die Dimensionsformel (4.1) folgt mit (4.2).  $\square$

### §4.3 RANG EINER MATRIX

Als Konsequenz der Dimensionsformel können wir nun zeigen, dass Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix gleich sind.

**Korollar 4.12.** *Der Zeilenrang einer Matrix ist gleich dem Spaltenrang.*

BEWEIS. Sei  $\mathbf{A}$  eine  $m \times n$ -Matrix über einem Körper  $\mathbb{K}$  mit Spaltenrang  $s \in \mathbb{N}_0$ , d. h.  $s$  ist die Dimension des Spaltenraums von  $\mathbf{A}$ . Der Spaltenraum von  $\mathbf{A}$  ist das Bild der linearen Abbildung  $f_{\mathbf{A}}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  mit  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ist genau der Kern der Abbildung  $f_{\mathbf{A}}$ . Sei  $r$  die Dimension des Kerns von  $f_{\mathbf{A}}$ . Nach der Dimensionsformel (Satz 4.11) ist

$$r + s = \dim(\ker(f_{\mathbf{A}})) + \dim(\operatorname{im}(f_{\mathbf{A}})) = \dim(\mathbb{K}^n) = n.$$

Mit dem Gauß–Jordan–Verfahren überführen wir die Matrix  $\mathbf{A}$  in reduzierte Zeilenstufenform und erhalten eine Matrix  $\mathbf{B}$ . Das Gleichungssystem  $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  hat dieselbe Lösungsmenge wie  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , die  $\ker(f_{\mathbf{A}})$  mit Dimension  $r$  ist. Wiederum nach der Dimensionsformel (angewendet auf die lineare Abbildung  $f_{\mathbf{B}}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  mit  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}\mathbf{x}$  dessen Kern ebenfalls die Lösungsmenge von  $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ist und dessen Bild dem Spaltenraum von  $\mathbf{B}$  entspricht) erhalten wir für die Dimension des Spaltenraums von  $\mathbf{B}$  genau  $n - r = s$ . Die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  haben also denselben Spaltenrang (obwohl sie möglicherweise unterschiedliche Spaltenräume haben). Darüberhinaus wissen wir bereits, dass  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  denselben Zeilenraum haben (siehe Lemma 3.37) und somit auch denselben Zeilenrang haben. Es reicht also zu zeigen, dass der Zeilenrang von  $\mathbf{B}$  genau  $s$  ist. Dafür betrachten wir die Zeilen von  $\mathbf{B}$  die keine Nullzeilen sind. Jede dieser Zeilen hat eine führende Eins und alle führenden Einsen stehen in unterschiedlichen Zeilen und Spalten. Wir müssen also zeigen, dass es genau  $s$  führende Einsen in  $\mathbf{B}$  gibt.

Die Anzahl der führenden Einsen entspricht genau der Anzahl der Spalten von  $\mathbf{B}$  minus der Anzahl der freien Variablen des Lösungsraums von  $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Die Matrix  $\mathbf{B}$  hat  $n$  Spalten und die Anzahl der freien Variablen entspricht der Dimension des Lösungsraums des homogenen, linearen Gleichungssystems  $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , der gleich  $r$  ist. Es gibt also  $n - r = s$  führende Einsen in  $\mathbf{B}$  und somit ist  $s$  der Zeilenrang der Matrix  $\mathbf{B}$ .  $\square$

Nach diesem Korollar brauchen wir nicht zwischen Zeilenrang und Spaltenrang einer Matrix zu unterscheiden.

**Definition 4.13.** Der Rang  $\operatorname{rank}(\mathbf{A})$  einer Matrix  $\mathbf{A}$  ist der Zeilenrang von  $\mathbf{A}$ .

Der folgende Satz ist eine einfache Konsequenz von Lemma 3.37 und zeigt, dass man den Rang einer Matrix mit dem Gauß–Verfahren bestimmen kann.

**Satz 4.14.** Sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$  für einen Körper  $\mathbb{K}$ , dann ist  $\operatorname{rank}(\mathbf{A})$  gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen einer Matrix  $\mathbf{B}$  in Zeilenstufenform die aus  $\mathbf{A}$  durch elementare Zeilenumformungen hervorgegangen ist.

BEWEIS. Wir wissen bereits wegen Lemma 3.37, dass elementare Zeilenumformungen nicht den Zeilenraum und somit auch nicht den Zeilenrang und den Rang einer Matrix ändern. Die von Null verschiedenen Zeilen der Zeilenstufen einer Matrix bilden eine

Basis des Zeilenraums. Damit ist die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen in der Zeilenstufenform  $\mathbf{B}$  genau der Rang von  $\mathbf{A}$ .  $\square$

Ränge von Matrizen lassen sich auch anwenden, um die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme zu untersuchen.

**Satz 4.15.** *Sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$  und  $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$  für einen Körper  $\mathbb{K}$ . Dann ist das lineare Gleichungssystem  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  des Gleichungssystems gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ist.*

BEWEIS. Seien  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{K}^{m \times 1}$  die Spalten der Matrix  $\mathbf{A}$  und

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$ . Das Gleichungssystem  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ist also genau dann lösbar, wenn  $\mathbf{b}$  eine Linearkombination der Spalten  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  von  $\mathbf{A}$  ist, wenn also  $\mathbf{b}$  ein Element des Spaltenraums  $\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  von  $\mathbf{A}$  ist.

Seien  $U := \text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  und  $V := \text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b})$  die Spaltenräume der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  und der erweiterten Koeffizientenmatrix. Der Vektor  $\mathbf{b}$  ist genau dann ein Element von  $U$ , wenn  $U = V$  gilt. Der Raum  $U$  ist immer ein Untervektorraum von  $V$ . Nach Satz 3.34 sind  $U$  und  $V$  genau dann gleich, wenn sie dieselbe Dimension haben. Die Dimension von  $U$  ist genau der Rang von  $\mathbf{A}$ , die Dimension von  $V$  der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix.

Damit hat das Gleichungssystem genau dann mindestens eine Lösung, wenn diese beiden Ränge übereinstimmen.  $\square$

**Beispiel 4.16.** (a) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{array} \right).$$

Diese Matrix haben wir schon in Beispiel 3.39 betrachtet. Die Zeilenstufenform lautet

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Da in der Zeilenstufenform zwei Zeilen von Null verschieden sind, hat die erweiterte Koeffizientenmatrix den Rang 2. Außerdem sehen wir, dass die

Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ebenfalls Rang 2 hat, da die gleichen elementaren Zeilenumformungen eingeschränkt auf die ersten drei Spalten die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergeben. Das gegebene lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix ist also lösbar.

- (b) Wir ändern nun die letzte Spalte der erweiterten Koeffizientenmatrix und betrachten das lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Das Gauß-Verfahren liefert die Zeilenstufenform

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Also hat die erweiterte Koeffizientenmatrix Rang 3, aber die Koeffizientenmatrix hat nur Rang 2. Also ist das lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix  $B$  nicht lösbar.

An dieser Stelle diskutieren wir noch die Struktur der Lösungsmengen von inhomogenen linearen Gleichungssystemen. Dieser Satz besagt, dass die Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  eine Nebenklasse der Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  ist.

**Satz 4.17.** Sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$  und  $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$  für einen Körper  $\mathbb{K}$ . Sei  $L_{\mathbf{A},\mathbf{0}} \subseteq \mathbb{K}^n$  die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$  eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

Dann sind die Lösungen  $L_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$  des inhomogenen Gleichungssystems  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  genau die Vektoren von der Form  $\mathbf{v} + \mathbf{u}$  für ein  $\mathbf{u} \in L_{\mathbf{A},\mathbf{0}}$ , d. h.

$$L_{\mathbf{A},\mathbf{b}} = \mathbf{v} + L_{\mathbf{A},\mathbf{0}} := \{\mathbf{v} + \mathbf{u} : \mathbf{u} \in L_{\mathbf{A},\mathbf{0}}\}$$

BEWEIS. Wir betrachten die lineare Abbildung  $f_{\mathbf{A}}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  mit  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ . Dann gilt

$$L_{\mathbf{A},\mathbf{0}} = \ker(f_{\mathbf{A}}).$$

Sei  $\mathbf{w} \in \mathbb{K}^n$  eine beliebige Lösung des inhomogenen Systems  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Dann gilt

$$f_{\mathbf{A}}(\mathbf{w} - \mathbf{v}) = f_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}) - f_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Also ist  $\mathbf{w} - \mathbf{v} \in L_{\mathbf{A},\mathbf{0}}$  und es existiert ein Lösung  $\mathbf{u} \in L_{\mathbf{A},\mathbf{0}}$  des homogenen Gleichungssystems, sodass

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u},$$

d. h.  $L_{\mathbf{A},\mathbf{b}} \subseteq \mathbf{v} + L_{\mathbf{A},\mathbf{0}}$ .

Sei umgekehrt  $\mathbf{u} \in L_{\mathbf{A},\mathbf{0}}$  eine Lösung des homogenen Gleichungssystems. Dann gilt

$$f_{\mathbf{A}}(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = f_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) + f_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}) = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

Also ist auch  $\mathbf{v} + \mathbf{u}$  eine Lösung des inhomogenen Systems  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  und somit erhalten wir  $\mathbf{v} + L_{\mathbf{A},\mathbf{0}} \subseteq L_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$ .  $\square$

**Beispiel 4.18.** Wir betrachten wieder das lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{array} \right).$$

Wie wir in Beispiel 3.39 gesehen haben, lautet die reduzierte Zeilenstufenform dieser Matrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Das entsprechende lineare Gleichungssystem lautet

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wir setzen für die freie Variable  $x_3$  die Zahl 0 ein und erhalten  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2}$  und  $x_3 = 0$  als eine mögliche Lösung des linearen Gleichungssystems.

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems hat die reduzierte Zeilenstufenform

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Das zugehörige Gleichungssystem lautet

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich  $x_1 = -x_3$  und  $x_2 = -x_3$ . Setzt man den Parameter  $t$  für  $x_3$  ein, so erhält man die allgemeine Lösung  $x_1 = -t$ ,  $x_2 = -t$  und  $x_3 = t$  für  $t \in \mathbb{R}$ . In Vektorschreibweise lautet die allgemeine Lösung des homogenen Systems also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems sind alle Summen der Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Lösungen des homogenen Gleichungssystems. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems lautet also

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

#### §4.4 INVERTIERBARKEIT VON MATRIZEN

Wir erinnern uns daran, dass eine Funktion  $f: X \rightarrow Y$  zwischen zwei Mengen  $X$  und  $Y$  injektiv ist, falls je zwei verschiedene Elemente von  $X$  durch  $f$  auf verschiedene Elemente von  $Y$  abgebildet werden. Für lineare Abbildungen lässt sich Injektivität leicht charakterisieren.

**Satz 4.19.** *Sei  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen. Dann ist  $f$  genau dann injektiv, wenn  $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$  gilt.*

**BEWEIS.** Wenn  $f$  injektiv ist, dann gibt es höchstens ein  $\mathbf{v} \in V$  mit  $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ . Es gilt  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , da für ein beliebigen Vektor  $\mathbf{u} \in V$  gilt

$$f(\mathbf{0}) = f(0 \cdot \mathbf{u}) = 0 \cdot f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Damit ist  $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ .

Sei nun  $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$  und seien  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ , sodass  $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w})$ . Dann gilt

$$f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}.$$

Also ist  $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \ker(f)$  und aus der Annahme  $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$  folgt  $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$ . Somit ist also  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$  und die Injektivität von  $f$  folgt.  $\square$

**Korollar 4.20.** *Sei  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen zwei  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen. Die Abbildung  $f$  ist genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist.*

BEWEIS. Angenommen  $f$  ist injektiv. Dann ist nach Satz 4.19 der Kern von  $f$  der Nullvektorraum  $\{\mathbf{0}\}$  der 0-dimensional ist. Nach der Dimensionsformel (Satz 4.11) folgt daraus, dass das Bild von  $f$  ein  $n$ -dimensionaler Unterraum von  $W$  ist. Da  $W$  selber  $n$ -dimensional ist, stimmt nach Satz 3.34 das Bild von  $f$  mit ganz  $W$  überein und  $f$  ist surjektiv.

Sei nun umgekehrt  $f$  surjektiv. Nach der Dimensionsformel hat  $f$  damit einen 0-dimensionalen Kern. Damit ist  $f$  injektiv.  $\square$

**Lemma 4.21.** *Ist  $f: V \rightarrow W$  eine bijektive lineare Abbildung, so ist auch die Umkehrabbildung  $f^{-1}: W \rightarrow V$  linear.*

BEWEIS. Seien  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann existieren  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  mit  $f(\mathbf{u}) = \mathbf{a}$  und  $f(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$  und es gilt  $f^{-1}(\mathbf{a}) = \mathbf{u}$  und  $f^{-1}(\mathbf{b}) = \mathbf{v}$ . Wegen der Linearität von  $f$  ist

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

und damit ist

$$f^{-1}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} = f^{-1}(\mathbf{a}) + f^{-1}(\mathbf{b}).$$

Außerdem ist  $f(\lambda\mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{a}$ . Also gilt  $f^{-1}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{u} = \lambda f^{-1}(\mathbf{a})$  und damit ist die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  linear.  $\square$

Eine bijektive lineare Abbildung nennen wir wie im Falle von strukturerhaltenden Abbildungen bei Gruppen oder Graphen einen *Isomorphismus*.

**Definition 4.22.** *Ein bijektive lineare Abbildung zwischen zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen heißt Isomorphismus. Zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume sind isomorph, wenn es einen Isomorphismus zwischen diesen gibt.*

Ein spezieller Isomorphismus ist die identische Abbildung  $\text{id}_{\mathbb{K}^n}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ . Die Matrix, die zu der linearen Abbildung  $\text{id}_{\mathbb{K}^n}$  ist die *Einheitsmatrix*, deren  $i$ -te Spalte der  $i$ -te Einheitsvektor  $\mathbf{e}_i$  in  $\mathbb{K}^n$  ist.

Ist  $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  eine lineare Abbildung, so existiert eine  $n \times n$ -Matrix  $\mathbf{A}_f$  mit  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_f\mathbf{x}$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ . Falls  $f$  ein Isomorphismus ist, dann ist auch

$$f^{-1}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$$

ein Isomorphismus (siehe Lemma 4.21). Somit existiert auch eine  $n \times n$ -Matrix  $\mathbf{A}_{f^{-1}}$  mit  $f^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}_{f^{-1}}\mathbf{y}$  für alle  $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$ . Wegen  $f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{K}^n}$  und  $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{K}^n}$  gilt

$$\mathbf{A}_f\mathbf{A}_{f^{-1}} = \mathbf{E}_n = \mathbf{A}_{f^{-1}}\mathbf{A}_f.$$

**Definition 4.23.** *Eine Matrix  $\mathbf{B}$  ist invers zu einer Matrix  $\mathbf{A}$ , falls für ein  $n \in \mathbb{N}_0$*

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E}_n = \mathbf{BA} \tag{4.5}$$

*gilt. Wir setzen  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$  und  $\mathbf{A}^{-1}$  heißt Inverse von  $\mathbf{A}$ . Eine Matrix  $\mathbf{A}$ , die eine Inverse besitzt, nennen wir invertierbar.*

Eine Matrix kann mit Blick auf (4.5) nur dann invertierbar sein, wenn sie quadratisch ist, also für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  aus  $\mathbb{K}^{n \times n}$ . Die Menge der invertierbaren Matrizen in  $\mathbb{K}^{n \times n}$  bilden somit die Einheitengruppe  $(\mathbb{K}^{n \times n})^\times$  des Rings der  $n \times n$ -Matrizen (siehe Kapitel 1.2).

**Satz 4.24.** *Eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  für einen Körper  $\mathbb{K}$  ist genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang hat, d.h., wenn  $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$  gilt.*

BEWEIS. Eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  ist genau dann invertierbar, wenn die lineare Abbildung  $f_{\mathbf{A}}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$  ein Isomorphismus ist. Insbesondere ist  $f_{\mathbf{A}}$  bijektiv und somit gilt  $\dim(\text{im}(f_{\mathbf{A}})) = n$ . Die Dimension des Bildes von  $f_{\mathbf{A}}$  ist aber genau die Dimension des Spaltenraums von  $\mathbf{A}$ , also gilt  $n = \dim(\text{im}(f_{\mathbf{A}})) = \text{rank}(\mathbf{A})$ .  $\square$

Wir wollen nun die Inversen von invertierbarer Matrizen berechnen. Für eine invertierbare Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  suchen wir eine Matrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  mit  $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{E}_n = \mathbf{B}\mathbf{A}$ . Wenn für Matrizen  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  die Gleichung  $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{E}_n$  gilt, dann gilt auch  $\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n$  und umgekehrt. Es genügt also, eine Matrix  $\mathbf{B}$  so zu bestimmen, dass  $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{E}_n$  gilt.

Die  $i$ -te Spalte von  $\mathbf{E}_n$  ist der  $i$ -te Einheitsvektor  $\mathbf{e}_i$  in  $\mathbb{K}^n$ . In dem Matrizenprodukt  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  ist die  $i$ -te Spalte genau das Produkt von  $\mathbf{A}$  mit der  $i$ -ten Spalte von  $\mathbf{B}$ . Die  $i$ -te Spalte von  $\mathbf{B}$  löst also das Gleichungssystem  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ . Damit lässt sich die zu  $\mathbf{A}$  inverse Matrix  $\mathbf{B}$  also spaltenweise bestimmen, in dem wir die Gleichungssysteme  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$  für jedes  $i \in [n]$  lösen. Schreiben wir die erweiterte Koeffizientenmatrix eines solchen Gleichungssystems auf, so erhalten wir  $(\mathbf{A}|\mathbf{e}_i)$ .

Um das Gleichungssystem zu lösen, bringen wir die Matrix  $(\mathbf{A}|\mathbf{e}_i)$  mit dem Gauß–Jordan–Verfahren in reduzierte Zeilenstufenform. Hat  $\mathbf{A}$  vollen Rang, so ist das Gleichungssystem lösbar und die reduzierte Zeilenstufenform von  $(\mathbf{A}|\mathbf{e}_i)$  hat die Form  $(\mathbf{E}_n|\mathbf{b}_i)$ , wobei  $\mathbf{b}_i$  die eindeutige Lösung des Gleichungssystems ist.

Die  $n$  linearen Gleichungssysteme  $(\mathbf{A}|\mathbf{e}_i)$  für  $i \in [n]$  können wir auf die folgende Weise gleichzeitig lösen. Wir schreiben die Matrix  $\mathbf{A}$  auf und die Matrix  $\mathbf{E}_n$  rechts daneben:  $(\mathbf{A}|\mathbf{E}_n)$ . Diese (erweiterte)  $n \times 2n$ -Matrix bringen wir nun mit dem Gauß–Jordan–Verfahren auf reduzierte Zeilenstufenform. Die linke Hälfte der entstehenden Matrix in reduzierter Zeilenstufenform ist die reduzierte Zeilenstufenform der Matrix  $\mathbf{A}$ . Also ist  $\mathbf{A}$  invertierbar, wenn die linke Hälfte der reduzierten Zeilenstufenform die Einheitsmatrix  $\mathbf{E}_n$  ist, wenn  $\mathbf{A}$  also vollen Rang hat. Die rechte Hälfte ist eine Matrix  $\mathbf{B}$ , deren  $i$ -te Spalte  $\mathbf{b}_i$  die Lösung von  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$  ist. Damit ist  $\mathbf{B}$  genau die zu  $\mathbf{A}$  inverse Matrix.

**Beispiel 4.25.** Wir betrachten die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Wir schreiben die Einheitsmatrix neben die Matrix  $\mathbf{A}$  und bringen die entstehende erweiterte  $3 \times 6$ -Matrix mittels des Gauß-Jordan-Verfahrens auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right] \\ \leftarrow + \end{array} \quad | \cdot (-1) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad | : 4 \\
 \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right] \cdot (-2) \\ \leftarrow + \end{array} \\
 \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) & | \cdot (-2) \\
 \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \left. \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right] \cdot (-\frac{1}{4}) \end{array} \\
 \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \left. \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right] \cdot 2 \end{array} \\
 \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

die zu  $\mathbf{A}$  inverse Matrix. Tatsächlich liefert die Probe

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Es ist also  $\mathbf{B}$  die Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  von  $\mathbf{A}$ .

Wir können nun leicht jedes lineare Gleichungssystem  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  lösen, indem wir beide Seiten von links mit  $\mathbf{A}^{-1}$  multiplizieren. Dann erhalten wir die Lösung  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ . Sei zum Beispiel

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dann löst

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

das lineare Gleichungssystem  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Die Probe liefert

$$\mathbf{Av} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

#### §4.5 DETERMINANTEN VON MATRIZEN

Ob eine quadratische Matrix invertierbar ist oder nicht, lässt sich am Rang der Matrix feststellen. Ein weiterer wichtiger Parameter von Matrizen ist die *Determinante* an der man unter anderem auch die Invertierbarkeit einer Matrix ablesen kann. Wie der Rang kann auch die Determinante mit Hilfe des Gauss-Verfahrens bestimmt werden.

Wir erinnern uns zunächst daran, dass eine Permutation einer endlichen Menge *gerade* ist, wenn sie das Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen ist. Sonst ist die Permutation ungerade. Für eine Permutation  $\pi$  einer endlichen Menge setzen wir das *Signum/Vorzeichen*

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \begin{cases} +1, & \pi \text{ ist gerade} \\ -1, & \pi \text{ ist ungerade.} \end{cases}$$

Die Permutationsgruppe aller Permutationen der Menge  $[n]$  mit der Gruppenoperation der Komposition bezeichnen wir mit  $\mathcal{S}_n$ . Außerdem ist

$$\mathcal{A}_n := \{\pi \in \mathcal{S}_n : \operatorname{sgn}(\pi) = 1\}$$

die Menge der geraden Permutationen, die die sogenannte *alternierende Untergruppe*  $\mathcal{A}_n$  von  $\mathcal{S}_n$  bildet.

**Definition 4.26.** Sei  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine Matrix über einem Körper  $\mathbb{K}$ . Dann ist die Determinante von  $\mathbf{A}$  definiert durch

$$\det(\mathbf{A}) := \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)}.$$

Für die Determinante einer Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$  schreiben wir auch abkürzend

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Hierbei ist zu beachten, dass das Vorzeichen  $\text{sgn}(\pi)$  dann der 1 bzw.  $-1$  in  $\mathbb{K}$  entspricht. Falls wir z. B. Matrizen über  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  betrachten, dann haben ungerade Permutation  $\pi$  das Vorzeichen  $\text{sgn}(\pi) = 2$ , da 2 der  $-1$  in  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  entspricht. Wir werden uns hier aber größtenteils auf Determinanten von Matrizen über  $\mathbb{R}$  beschränken.

Die in der Definition angegebene Formel der Determinante ist als *Leibniz-Formel* bekannt und sehr ineffizient für die Berechnung der Determinante, da eine Summe mit  $|\mathcal{S}_n| = n!$  Summanden gebildet wird. Für kleine  $n$  ergeben sich allerdings einfache Formeln für die Determinantenfunktion.

- Beispiel 4.27.** (a) Für  $n = 0$  besteht  $\mathcal{S}_0$  aus der leeren Abbildung und in der Leibniz-Formel steht ein Summand mit einem leeren Produkt, welches 1 ergibt. Somit ist  $\det(\mathbf{A}) = 1$  für  $\mathbf{A} = () \in \mathbb{K}^{0 \times 0}$ .
- (b) Für  $n = 1$  enthält  $\mathcal{S}_1$  nur die Identität, die eine gerade Permutation ist und somit ist für  $\mathbf{A} = (a_{11}) \in \mathbb{K}^{1 \times 1}$  die Determinante gegeben durch  $\det(\mathbf{A}) = a_{11}$ .
- (c) Für  $n = 2$  gibt es neben der Identität  $\text{id}$  noch die ungerade Permutation  $\tau \in \mathcal{S}_2$  die die beiden Elemente vertauscht und für eine Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$  erhalten wir die allgemeine Formel

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= \text{sgn}(\text{id})a_{1\text{id}(1)}a_{2\text{id}(2)} + \text{sgn}(\tau)a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

- (d) Für  $n = 3$  gibt es drei gerade und drei ungerade Permutationen in  $\mathcal{S}_3$  und man erhält für  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$  die *Sarrus-Regel*

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

die oft graphisch wie folgt dargestellt wird:

$$\begin{array}{ccccccc} & + & & + & & + & \\ a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \\ & - & & - & & - & & & \end{array}$$

Hierbei entsprechen die Produkte entlang der durchgezogenen Linien den geraden Permutationen und bekommen ein positives Vorzeichen, während die Produkte entlang der gestrichelten Linien den ungeraden Permutationen entsprechen und deswegen mit negativem Vorzeichen verrechnet werden.

(e) Für allgemeines  $n \in \mathbb{N}_0$  kann man aus der Leibniz-Formel ein rekursives Verfahren zur Berechnung von Determinanten ableiten, welches als der *Entwicklungssatz von Laplace* bekannt ist.

Für eine Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $k, \ell \in [n]$  sei  $\mathbf{A}_{k\ell}$  die  $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix die aus  $\mathbf{A}$  durch Streichen der  $k$ -ten Zeile und  $\ell$ -ten Spalte hervorgeht. Es gilt für jedes  $k \in [n]$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{k+\ell} a_{k\ell} \det(\mathbf{A}_{k\ell})$$

und man nennt diese Formel auch *Entwicklung nach der  $k$ -ten Zeile*. Genauso kann die Determinante für jedes  $\ell \in [n]$  über die  $\ell$ -te Spalte entwickelt werden und es gilt

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+\ell} a_{k\ell} \det(\mathbf{A}_{k\ell}).$$

Entwickelt man z. B.  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{4 \times 4}$  nach der ersten Zeile

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Die Berechnung der Determinante einer  $4 \times 4$ -Matrix wird also rekursiv auf die Berechnung von vier Determinanten von  $3 \times 3$ -Matrizen reduziert. Genauso erhält man z. B. für die Entwicklung nach der zweiten Spalte die Formel

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &\quad - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Grob gesagt entspricht die Entwicklung der Determinante nach einer Zeile/Spalte einer speziellen Umordnung der Summe in der Leibniz-Formel. Wir lassen den Beweis des Entwicklungssatzes von Laplace als Übung.

Eine Entwicklung nach der  $k$ -ten Zeile/ $\ell$ -ten Spalte kann bei kleinen Matrizen praktisch sein, wenn die entsprechende Zeile/Spalte viele Nullen enthält,

da für  $a_{k\ell} = 0$  der entsprechende Summand in der Formel Null ist und die Berechnung von  $\det(\mathbf{A}_{k\ell})$  eingespart werden kann.

Für größere  $n$  ist die Berechnung der Determinante mithilfe der Leibniz-Regel oder dem Entwicklungssatz von Laplace sehr mühsam, z. B. ergeben sich für  $n = 10$  bereits  $10! > 3$  Millionen Summanden und für eine effiziente Berechnung der Determinante einer Matrix beweisen wir zuerst die folgenden Rechenregeln.

**Satz 4.28** (Rechenregeln für Determinanten). *Sei  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine Matrix über einem Körper  $\mathbb{K}$ . Dann gelten folgende Rechenregeln:*

- (i) *Falls  $\mathbf{A}$  eine obere Dreiecksmatrix ist, d. h.  $a_{ij} = 0$  für alle  $i > j$ , dann ist die Determinante von  $\mathbf{A}$  das Produkt der Elemente auf der Diagonalen von  $\mathbf{A}$*

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

*Insbesondere ergibt sich  $\det(\mathbf{E}_n) = 1$  für die Einheitsmatrix  $\mathbf{E}_n \in \mathbb{K}^{n \times n}$ .*

- (ii) *Seien  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{K}^{1 \times n}$  die Zeilen von  $\mathbf{A}$  und für ein  $k \in [n]$  sei  $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}'_k + \mathbf{a}''_k$  für zwei Zeilenvektoren  $\mathbf{a}'_k, \mathbf{a}''_k \in \mathbb{K}^{1 \times n}$ . Dann gilt*

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}') + \det(\mathbf{A}''),$$

*wobei  $\mathbf{A}'$  und  $\mathbf{A}''$  aus  $\mathbf{A}$  dadurch hervorgehen, dass die  $k$ -te Zeile  $\mathbf{a}_k$  durch  $\mathbf{a}'_k$  bzw.  $\mathbf{a}''_k$  ersetzt wird.*

- (iii) *Sei  $\mathbf{B}$  die Matrix die aus  $\mathbf{A}$  hervorgeht, indem für ein  $k \in [n]$  die  $k$ -te Zeile mit  $\lambda \in \mathbb{K}$  multipliziert wird, dann gilt  $\det(\mathbf{B}) = \lambda \det(\mathbf{A})$ . Insbesondere gilt  $\det(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^n \det(\mathbf{A})$  für jedes  $\lambda \in \mathbb{K}$ .*

- (iv) *Falls  $\mathbf{A}$  zwei gleiche Zeilen hat, dann ist  $\det(\mathbf{A}) = 0$ .*

- (v) *Sei  $\mathbf{B}$  die Matrix, die aus  $\mathbf{A}$  durch Vertauschung zweier Zeilen hervorgeht, dann gilt  $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$ .*

- (vi) *Sei  $\mathbf{B}$  die Matrix die aus  $\mathbf{A}$  hervorgeht, indem das Vielfache einer Zeile auf eine andere addiert wird, dann ändert sich die Determinante nicht, d. h. in diesem Fall gilt  $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$ .*

Die Rechenregeln (ii) und (iii) besagen, dass die Abbildung  $\det: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$  linear in jeder Zeile ist. Dies ist nicht mit der Linearität von Abbildungen zu verwechseln, so gilt  $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$  im Allgemeinen **nicht** für  $n \times n$ -Matrizen mit  $n \geq 2$ , wie man z. B. in  $\mathbb{R}^{n \times n}$  durch

$$\det(\mathbf{E}_n + \mathbf{E}_n) = \det(2\mathbf{E}_n) \stackrel{(iii)}{=} 2^n \det(\mathbf{E}_n) \stackrel{(i)}{=} 2^n \stackrel{n \geq 2}{\neq} 2 = 1 + 1 \stackrel{(i)}{=} \det(\mathbf{E}_n) + \det(\mathbf{E}_n)$$

einsieht.

Wegen dem Vorzeichenwechsel in Rechenregel (v) sagt man auch, dass

$$\det: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$$

*alternierend* ist und die Eigenschaft  $\det(\mathbf{E}_n) = 1$  bedeutet, dass die Determinantenfunktion *normiert* ist. Tatsächlich kann man zeigen, dass die Determinantenfunktion durch diese drei Eigenschaften eindeutig bestimmt ist, d. h. die einzige normierte, alternierende und in jeder Zeile lineare Abbildung von  $\mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$  ist die Determinantenfunktion.

BEWEIS VON SATZ 4.28. (i) Wir zeigen, dass für jedes  $\pi \in \mathcal{S}_n$  mit  $\pi \neq \text{id}$  der entsprechende Summand  $\prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)}$  in der Leibniz-Formel 0 ist. Da sich für die Identität das Produkt der Diagonalelemente ergibt, folgt somit diese Rechenregel.

Sei also  $\pi \neq \text{id}$ . Dann gibt es einen größten Index  $k \in [n]$  mit  $\pi(k) \neq k$ . Da für  $i > k$  dann  $\pi(i) = i$  gilt und  $\pi$  injektiv ist, gilt  $\pi(k) \notin \{k+1, \dots, n\}$  und aus  $\pi(k) \neq k$  folgt  $\pi(k) < k$ . Da  $\mathbf{A}$  eine obere Dreiecksmatrix ist, gilt  $a_{k\pi(k)} = 0$  und es folgt  $\prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} = 0$ , da einer der Faktoren 0 ist.

(ii) Seien  $\mathbf{A}' = (a'_{k1}, \dots, a'_{kn})$  und  $\mathbf{A}'' = (a''_{k1}, \dots, a''_{kn})$  dann ergibt sich die Rechenregel direkt durch Einsetzen in die Leibniz-Formel:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\pi) \prod_{i \neq k} a_{i\pi(i)} \cdot (a'_{k\pi(k)} + a''_{k\pi(k)}) \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\pi) \prod_{i \neq k} a_{i\pi(i)} \cdot a'_{k\pi(k)} + \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\pi) \prod_{i \neq k} a_{i\pi(i)} \cdot a''_{k\pi(k)} \\ &= \det(\mathbf{A}') + \det(\mathbf{A}''). \end{aligned}$$

(iii) Diese Rechenregel ergibt sich wieder durch direktes Einsetzen in die Leibniz-Formel, da

$$\det(\mathbf{B}) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\pi) \prod_{i \neq k} a_{i\pi(i)} \cdot (\lambda a_{k\pi(k)}) = \lambda \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} = \lambda \det(\mathbf{A}).$$

(iv) Seien  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{K}^{1 \times n}$  die Zeilen von  $\mathbf{A}$  und für  $1 \leq j < k \leq n$  gelte  $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_k$ . Sei  $\tau \in \mathcal{S}_n$  die Transposition  $(jk)$ , d. h. die Permutation die  $j$  mit  $k$  vertauscht und den Rest fixiert hält. Für jede Permutation  $\pi \in \mathcal{S}_n$  ist genau eine der beiden Permutationen  $\pi$  und  $\tau \circ \pi$  gerade und die andere ungerade und somit gilt  $\text{sgn}(\pi) = -\text{sgn}(\tau \circ \pi)$  und die Abbildung  $\pi \mapsto \tau \circ \pi$  ist eine Bijektion zwischen  $\mathcal{A}_n$  und  $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$ . Somit ergibt sich aus der Leibniz-Formel

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{\pi \in \mathcal{A}_n} \left( \text{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} + \text{sgn}(\tau \circ \pi) \prod_{i=1}^n a_{i,\pi(\tau(i))} \right) \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{A}_n} \left( \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} - \prod_{i=1}^n a_{i,\pi(\tau(i))} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Da die Zeilen  $\mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$  und  $\mathbf{a}_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn})$  identisch sind und  $\tau(j) = k$  sowie  $\tau(k) = j$  gilt, haben wir

$$a_{k\pi(k)} = a_{j\pi(k)} = a_{j,\pi(\tau(j))} \quad \text{und} \quad a_{j\pi(j)} = a_{k\pi(j)} = a_{k,\pi(\tau(k))}. \quad (4.7)$$

Darüberhinaus gilt  $\tau(i) = i$  für alle  $i \in [n] \setminus \{j, k\}$ . Somit ergibt sich für alle Permutationen  $\pi$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} &= \prod_{i \notin \{j, k\}} a_{i\pi(i)} \cdot a_{j\pi(j)} \cdot a_{k\pi(k)} \\ &\stackrel{(4.7)}{=} \prod_{i \notin \{j, k\}} a_{i\pi(\tau(i))} \cdot a_{k,\pi(\tau(k))} \cdot a_{j,\pi(\tau(j))} = \prod_{i=1}^n a_{i,\pi(\tau(i))} \end{aligned}$$

und zusammen mit (4.6) folgt  $\det(\mathbf{A}) = 0$ .

(v) Seien  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{K}^{1 \times n}$  die Zeilen von  $\mathbf{A}$  und sei  $\mathbf{B}$  die Matrix die aus  $\mathbf{A}$  durch vertauschen von  $\mathbf{a}_j$  und  $\mathbf{a}_k$  für  $1 \leq j < k \leq n$  hervorgeht. Wir betrachten die folgenden Hilfsmatrizen  $\mathbf{C}_{\gamma, \delta}^{\alpha, \beta}$  für  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{0, 1\}$  gegeben durch

$$\mathbf{C}_{\gamma, \delta}^{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \alpha \mathbf{a}_j + \beta \mathbf{a}_k \\ \vdots \\ \gamma \mathbf{a}_j + \delta \mathbf{a}_k \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix},$$

d. h. für  $i \notin \{j, k\}$  ist die  $i$ -te Zeile von  $\mathbf{C}_{\gamma, \delta}^{\alpha, \beta}$  dieselbe wie die  $i$ -te Zeile von  $\mathbf{A}$  und die  $j$ -te und  $k$ -te Zeile besteht aus Kombinationen von  $\mathbf{a}_j$  und  $\mathbf{a}_k$ . Insbesondere ist  $\mathbf{C}_{0,1}^{1,0} = \mathbf{A}$  und  $\mathbf{C}_{1,0}^{0,1} = \mathbf{B}$ . Da  $\mathbf{C}_{1,1}^{1,1}$  zweimal die Zeile  $\mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k$  enthält folgt aus Rechenregel (iv)  $\det(\mathbf{C}_{1,1}^{1,1}) = 0$ . Des Weiteren ergeben mehrere Anwendungen von Rechenregel (ii)

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\mathbf{C}_{1,1}^{1,1}) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \det(\mathbf{C}_{1,1}^{1,0}) + \det(\mathbf{C}_{1,1}^{0,1}) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \det(\mathbf{C}_{0,1}^{1,0}) + \det(\mathbf{C}_{1,0}^{1,0}) + \det(\mathbf{C}_{1,1}^{0,1}) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \det(\mathbf{C}_{0,1}^{1,0}) + \det(\mathbf{C}_{1,0}^{1,0}) + \det(\mathbf{C}_{0,1}^{0,1}) + \det(\mathbf{C}_{1,0}^{0,1}). \end{aligned}$$

Die Matrix  $\mathbf{C}_{1,0}^{1,0}$  enthält zweimal die Zeile  $\mathbf{a}_j$  und  $\mathbf{C}_{0,1}^{0,1}$  enthält zweimal die Zeile  $\mathbf{a}_k$  und somit folgt aus Rechenregel (iv) schließlich

$$0 = \det(\mathbf{A}) + 0 + 0 + \det(\mathbf{B})$$

und es gilt  $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$ .

(vi) Diese Rechenregel folgt ganz ähnlich wie (v). Für  $j \neq k$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  sei  $\mathbf{B}$  die Matrix, die aus  $\mathbf{A}$  dadurch hervorgeht, dass das  $\lambda$ -fache der  $k$ -te Zeile auf die  $j$ -te Zeile addiert wird. Die Rechenregeln (ii) und (iii) ergeben

$$\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \lambda \det(\mathbf{C}),$$

für die Matrix  $\mathbf{C}$ , die sich von  $\mathbf{A}$  nur in der  $j$ -ten Zeile unterscheidet und dort eine Kopie der  $k$ -ten Zeile enthält. Wegen (iv) ist  $\det(\mathbf{C}) = 0$  und wir erhalten

$$\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}),$$

was den Beweis von Satz 4.28 abschließt.  $\square$

Die Rechenregeln (i), (iii), (v) und (vi) aus Satz 4.28 erlauben eine effiziente Berechnung der Determinante mit einer angepassten Variante des Gauß-Verfahrens. Tatsächlich beschreiben die Regeln (iii), (v) und (vi), wie sich die Determinante bei elementaren Zeilenumformungen verhält. Mithilfe dieser Operationen können wir ausgehend von einer gegebenen Matrix  $\mathbf{A}$  diese in eine Matrix  $\mathbf{B}$  in Zeilenstufenform umformen. Jede Matrix in Zeilenstufenform ist eine obere Dreiecksmatrix und so können wir mit Rechenregel (i) einfach die Determinante von  $\mathbf{B}$  berechnen und mit der Liste der Zeilenumformungen auf die Determinante von  $\mathbf{A}$  zurückschließen.

Etwas weniger fehleranfällig zur Berechnung der Determinante liefert die folgende angepasste Variante des Gauß-Verfahrens, welche eine Matrix in *einfache Zeilenstufenform* umformt. Wobei wir die Bedingung (ii) in Definition 2.12 weglassen und nicht fordern, dass das führende von Null verschiedene Körperelement in den nicht-trivialen Zeilen eine Eins ist.

**Definition 4.29.** *Eine Matrix ist in einfacher Zeilenstufenform wenn folgende Punkte erfüllt sind:*

- (a) *Alle Zeilen, die nur Nullen enthalten stehen unten in der Matrix.*
- (b) *Für je zwei verschiedene Zeilen, die nicht nur Nullen enthalten, steht das führende von Null verschiedene Element der oberen Zeile echt weiter links als das in der unteren Zeile.*

Genau wie mit drei elementaren Zeilenumformungen aus Definition 2.10 jede gegebene Matrix in Zeilenstufenform gebracht werden kann, kann man zeigen das bereits die erste und dritte Umformung genügen, um eine Matrix in einfache Zeilenstufenform umzuformen. Das entsprechende Verfahren nennen wir *einfaches Gauß-Verfahren*, welches nur

- Zeilenvertauschungen und
- Addition des Vielfachen einer Zeile auf ein andere Zeile

verwendet, um ausgehend von einer gegebenen Matrix  $\mathbf{A}$  eine Matrix  $\mathbf{B}$  in einfacher Zeilenstufenform zu gewinnen. Die Matrix  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  ist dann insbesondere eine obere

Dreiecksmatrix und somit folgt aus Rechenregel (i) aus Satz 4.28

$$\det(\mathbf{B}) = \prod_{i=1}^n b_{ii}.$$

Bei dem einfachen Gauß-Verfahren ändert die Determinante nach Rechenregeln (v) und (vi) nur ihr Vorzeichen, wenn zwei Zeilen vertauscht werden und für die Determinante von  $\mathbf{A}$  ergibt sich

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^r \det(\mathbf{B}) = (-1)^r \prod_{i=1}^n b_{ii}, \quad (4.8)$$

wobei  $r$  die Anzahl der Zeilenvertauschungen beim durchgeführten einfachen Gauß-Verfahren ist.

**Beispiel 4.30.** Wir berechnen mit dem einfachen Gauß-Verfahren die Determinante der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\substack{\cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow +}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\leftarrow} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\cdot 2 \\ \leftarrow +}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\cdot(-3) \\ \leftarrow +}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \end{aligned}$$

Für die Determinante von  $\mathbf{B}$  erhalten wir also  $\det(\mathbf{B}) = 3 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 8 = -72$  und da wir eine Zeilenvertauschung durchgeführt haben, gilt

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^1 \det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{B}) = 72.$$

In der Kurzschreibweise für Determinanten können wir diese Rechnung auch in Form einer Gleichung wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \end{vmatrix} \\
 &= (-1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \end{vmatrix} \\
 &= (-1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -4 \end{vmatrix} \\
 &= (-1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \\
 &= (-1) \cdot (3 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 8) = 72.
 \end{aligned}$$

Insbesondere folgt aus (4.8) für eine Matrix  $\mathbf{A}$  und die durch ein einfaches Gauß-Verfahren daraus gewonnenen Matrix  $\mathbf{B}$  in einfacher Zeilenstufenform

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \quad \iff \quad \det(\mathbf{B}) = 0.$$

Da  $\det(\mathbf{B})$  das Produkt der Diagonalelemente von  $\mathbf{B}$  ist, muss in so einem Fall mindestens eines davon 0 sein, was wiederum äquivalent dazu ist, dass  $\mathbf{B}$  eine Nullzeile hat, da  $\mathbf{B}$  eine quadratische Matrix ist. Somit hat  $\mathbf{B}$  nicht vollen Zeilenrang und wir erhalten direkt das folgende Korollar.

**Korollar 4.31.** Sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine Matrix über einem Körper  $\mathbb{K}$ . Es gilt  $\det(\mathbf{A}) = 0$  genau dann, wenn  $\text{rank}(\mathbf{A}) < n$ .

Zusammen mit Satz 4.24 ergibt sich dann die folgende Charakterisierung invertierbarer Matrizen.

**Korollar 4.32.** Eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  über einem Körper  $\mathbb{K}$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ .

Wir schließen die Lineare Algebra mit der folgenden eleganten Rechenregel für die Determinante des Produkts zweier Matrizen ab.

**Satz 4.33** (Determinanten-Multiplikationssatz). *Seien  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  Matrizen über einem Körper  $\mathbb{K}$ . Dann gilt*

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$$

und somit folgt auch  $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{BA})$ .

Darüberhinaus folgt für eine invertierbare Matrix  $\mathbf{A}$  und ihr Inverses  $\mathbf{A}^{-1}$

$$1 = \det(\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{AA}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^{-1}) \implies \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}.$$

BEWEIS. Sei  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$  und seien  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{K}^{1 \times n}$  die Zeilenvektoren der Matrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ , d. h.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix}.$$

Für das Produkt  $\mathbf{AB}$  ist dann die  $k$ -te Zeile der Zeilenvektor  $\sum_{i=1}^n a_{ki} \mathbf{b}_i$  und wir haben

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} \mathbf{b}_i \end{pmatrix}$$

Für  $\det(\mathbf{AB})$  können wir nun  $n^n$ -Mal die Linearität aus der Rechenregel (ii) (unabhängig jeweils  $n$ -Mal für jede Zeile) anwenden und erhalten

$$\det(\mathbf{AB}) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n \det \left( \begin{pmatrix} a_{1j_1} \mathbf{b}_{j_1} \\ \vdots \\ a_{nj_n} \mathbf{b}_{j_n} \end{pmatrix} \right).$$

Als nächstes benutzen wir für jedes Zeile die Linearität aus der Rechenregel (iii)

$$\det(\mathbf{AB}) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n \prod_{i=1}^n a_{ij_i} \cdot \det \left( \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{j_1} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{j_n} \end{pmatrix} \right).$$

Mit Blick auf Rechenregel (iv) sind die der  $n^n$  Summanden Null für die zwei Zeilen der Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_{j_1} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{j_n} \end{pmatrix}$$

gleich sind. Anders gesagt sind nur die Summanden relevant für die  $j_1, \dots, j_n$  paarweise verschieden sind, d. h. für diese Summanden gibt es eine Permutation  $\pi \in \mathcal{S}_n$  mit

$\pi(i) = j_i$  für alle  $i \in [n]$  und es folgt

$$\det(\mathbf{AB}) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} \cdot \det \left( \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{\pi(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{\pi(n)} \end{pmatrix} \right).$$

Schließlich folgt aus der Rechenregel (v) für alle  $\pi \in \mathcal{S}_n$

$$\det \left( \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{\pi(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{\pi(n)} \end{pmatrix} \right) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \det(\mathbf{B})$$

und es ergibt sich die gesuchte Identität

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} \cdot \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \det(\mathbf{B}) \\ &= \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}). \end{aligned}$$

□

#### §4.6 EIGENWERTE UND DIAGONALISIERBARKEIT

In diesem Abschnitt betrachten wir lineare Abbildungen von einem  $K$ -Vektorraum  $V$  nach  $V$  selbst. Solche Abbildungen nennt man auch *Endomorphismen* von  $V$ .

Ist ein  $K$ -Vektorraum  $V$  endlich erzeugt, so hat er eine Basis  $B = (v_1, \dots, v_n)$ , wobei  $n$  die Dimension von  $V$  und die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig in  $V$  sind. Eine Basis liefert ein Koordinatensystem für den Vektorraum. Ist  $v \in V$ , so gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  mit

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Wir nennen  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  die *Koordinaten* von  $v$  bezüglich der Basis  $B$ . Die Abbildung

$$\kappa_B: V \longrightarrow K^n,$$

die jedem Vektor  $v \in V$  seine Koordinaten bezüglich der Basis  $B$  zuordnet, ist die Koordinatenabbildung bezüglich  $B$ .

Wie man leicht sieht, ist  $\kappa_B$  eine bijektive lineare Abbildung, also ein *Isomorphismus* zwischen  $K$ -Vektorräumen. Für jeden Endomorphismus  $f: V \longrightarrow V$  und jede Basis  $B$  von  $V$  ist die Abbildung

$$\kappa_B \circ f \circ \kappa_B^{-1}: K^n \longrightarrow K^n$$

linear und damit einfach die Multiplikation mit einer Matrix  $M_B(f)$ .  $M_B(f)$  ist die *Abbildungsmatrix* von  $f$  bezüglich der Basis  $B$ . Die  $j$ -te Spalte von  $M_B(f)$  besteht aus den Koordinaten von  $f(v_j)$  bezüglich der Basis  $B$ .

**Beispiel 4.34.** Sei  $B = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V = K^n$ . Wir betrachten die Koordinatenabbildung  $\kappa_B: V \rightarrow K^n$  bezüglich der Basis  $B$ . Wegen  $V = K^n$  ist diese Abbildung in Wirklichkeit auf  $K^n$  definiert. Damit ist  $\kappa_B$  die Multiplikation mit einer Matrix  $A$ . Diese Matrix ist zunächst nicht so einfach zu bestimmen. Wir kennen aber die Umkehrabbildung  $\kappa_B^{-1}$  der Koordinatenabbildung. Es gilt nämlich für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  die Gleichung  $\kappa_B(v_i) = e_i$ . Damit ist  $\kappa_B^{-1}(e_i) = v_i$ . Die lineare Abbildung  $\kappa_B^{-1}$  ist also die Multiplikation mit der Matrix, deren Spalten genau die Vektoren  $v_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  sind. Damit ist die Matrix  $A$  die Inverse der Matrix, deren Spalten die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  sind.

Wir können also die Matrix zur Koordinatenabbildung  $\kappa_B$  wie folgt berechnen: trage die Vektoren  $v_i$  als Spalten in eine Matrix  $C$  ein. Invertiere die Matrix  $C$ . Die Koordinatenabbildung  $\kappa_B: K^n \rightarrow K^n$  zur Basis  $B$  ist einfach die Multiplikation mit der Matrix  $A = C^{-1}$ .

Wir führen diese Berechnung mit konkreten Zahlen durch. Wir betrachten die Vektoren  $v_1 = (-1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (2, 2, 0)$  und  $v_3 = (0, 1, 0)$ . In Beispiel 4.25 hatten wir gesehen, dass die Matrix  $A$  mit den Spalten  $v_1$ ,  $v_2$  und  $v_3$  invertierbar ist. Damit ist  $B = (v_1, v_2, v_3)$  eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ . Wir wollen die Koordinaten des Vektors  $(1, 2, 3)$  bezüglich dieser Basis bestimmen, also  $\kappa_B(1, 2, 3)$ .

Dazu invertieren wir die Matrix  $A$  und erhalten

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\kappa_B(1, 2, 3) = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

wie wir schon im Beispiel 4.25 ausgerechnet hatten. Also lauten die Koordinaten von  $(1, 2, 3)$  bezüglich der Basis  $B$  einfach  $(3, 2, -5)$ . Das ist natürlich genau dasselbe, wie zu sagen, dass  $(3, 2, -5)$  eine Lösung des Gleichungssystems

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist.

Um nun Endomorphismen von Vektorräumen zu verstehen, suchen wir für jeden Endomorphismus eine Basis, bezüglich der die Abbildungsmatrix eine besonders einfache Form hat. Im Allgemeinen löst der Satz über die *Jordansche Normalform* dieses Problem für Vektorräume über  $\mathbb{C}$ , der aber den Rahmen dieser Vorlesung sprengt. Wir befassen uns nur mit einem interessanten Spezialfall.

Ein besonders einfacher Endomorphismus ist die *Streckung* um einen konstanten Faktor. Eine lineare Abbildung  $f: V \rightarrow V$  ist eine Streckung um den Faktor  $\lambda \in K$ , falls für alle  $v \in V$  gilt:  $f(v) = \lambda v$ . Es gibt auch lineare Abbildungen, die einzelne Vektoren um einen Faktor strecken, aber nicht alle Vektoren oder nicht alle Vektoren um den gleichen Faktor.

**Definition 4.35** (Eigenwerte und Eigenvektoren). Sei  $K$  ein Körper, sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und sei  $f: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Ein Vektor  $v \in V \setminus \{0\}$  heißt Eigenvektor von  $f$  zum Eigenwert  $\lambda \in K$ , falls  $f(v) = \lambda v$  gilt. Ist  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix über  $K$ , so ist  $v \in K^n \setminus \{0\}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda \in K$ , falls  $Av = \lambda v$  gilt, falls also  $v$  ein Eigenvektor der linearen Abbildung  $x \mapsto Ax$  zum Eigenwert  $\lambda$  ist.

Man beachte, dass  $0 \in K$  durchaus ein Eigenwert sein kann, während Eigenvektoren immer von 0 verschieden sind.

**Beispiel 4.36.** (a) Es sei  $V$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^2$ . Jede Drehung  $f: V \rightarrow V$  um den Nullpunkt um einen Winkel  $\varphi$  ist eine lineare Abbildung. Ist  $\varphi$  kein Vielfaches von  $180^\circ$ , so hat  $f$  keine Eigenvektoren, da kein von Null verschiedener Vektor auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet wird. Alle Vektoren  $\neq 0$  sind Eigenvektoren der Drehung um  $0^\circ$  zum Eigenwert 1. Alle Vektoren  $\neq 0$  sind Eigenvektoren der Drehung um  $180^\circ$  zum Eigenwert  $-1$ .

(b) Sei  $K$  ein beliebiger Körper. Eine  $n \times n$ -Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  heißt *Diagonalmatrix*. Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  ist der  $i$ -te Einheitsvektor  $e_i$  ein Eigenvektor der Matrix  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_i$ .

Mit Diagonalmatrizen kann man besonders einfach rechnen. Zum Beispiel gilt für die Diagonalmatrix aus Beispiel 4.36 und alle  $k \in \mathbb{N}$ :

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn alle  $\lambda_i$  von 0 verschieden sind. In diesem Fall ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

**Definition 4.37.** Eine lineare Abbildung  $f: V \rightarrow V$  heißt diagonalisierbar, wenn es eine Basis  $B$  von  $V$  gibt, so dass  $M_B(f)$  eine Diagonalmatrix ist. Eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  heißt diagonalisierbar, wenn die lineare Abbildung  $K^n \rightarrow K^n$  definiert durch  $v \mapsto Av$  diagonalisierbar ist.

**Satz 4.38.** Ein Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  eines endlichdimensionalen Vektorraums  $V$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn  $V$  eine Basis hat, die aus Eigenvektoren von  $f$  besteht.

BEWEIS. Sei  $B = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$ , so dass für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  der Vektor  $v_i$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_i \in K$  ist. Dann ist  $f(v_i) = \lambda_i v_i$ . Damit gilt

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Sei nun umgekehrt  $B = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$ , so dass  $M_B(f)$  die oben angegebene Form hat. Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt dann  $f(v_i) = \lambda_i v_i$ . Damit ist  $B$  eine Basis von  $V$ , die aus Eigenvektoren von  $f$  besteht.  $\square$

**Definition 4.39.** Zwei  $n \times n$ -Matrizen  $A$  und  $B$  über einem Körper  $K$  heißen ähnlich, falls es eine invertierbare  $n \times n$ -Matrix  $P$  über  $K$  gibt, so dass  $P^{-1}AP = B$  gilt.

Wie man schnell nachrechnet, ist die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation.

**Lemma 4.40.** Zwei  $n \times n$ -Matrizen  $A$  und  $B$  über einem Körper  $K$  sind genau dann ähnlich, wenn  $K^n$  eine Basis  $C = (v_1, \dots, v_n)$  hat, so dass die Abbildungsmatrix  $M_C(f_A)$  der Abbildung  $f_A: K^n \rightarrow K^n$  definiert durch  $v \mapsto Av$  genau die Matrix  $B$  ist.

BEWEIS. Seien  $A$  und  $B$  ähnlich und  $P$  eine invertierbare Matrix mit  $B = P^{-1}AP$ . Da  $P$  invertierbar ist, sind die Spalten von  $P$  linear unabhängig und bilden somit eine Basis von  $K^n$ . Sei  $C = (v_1, \dots, v_n)$  diese Basis von  $K^n$ . Wir bestimmen die Abbildungsmatrix  $M_C(f_A)$ .

Für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  ist  $Pe_j$  genau die  $j$ -te Spalte von  $P$ , also  $Pe_j = v_j$ . Also ist  $APe_j = Av_j$ . Man beachte, dass  $P^{-1}$  die Abbildungsmatrix der Koordinatenabbildung

zu der Basis  $C$  ist. Damit ist  $P^{-1}APe_j$  der Koordinatenvektor von  $Av_j$  bezüglich der Basis  $C$ . Damit ist  $M_C(f_A) = P^{-1}AP = B$ .

Sei umgekehrt  $C = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $K^n$ , so dass die Abbildungsmatrix  $M_C(f_A)$  genau die Matrix  $B$  ist. Sei  $P$  die Matrix, deren Spalten genau die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  sind.  $P^{-1}$  ist wieder die Matrix zu der Koordinatenabbildung zu der Basis  $C$ . Für jedes  $j \in \{1, \dots, n\}$  ist  $P^{-1}Av_j$  der Koordinatenvektor von  $Av_j$  bezüglich der Basis  $C$ , also die  $j$ -te Spalte von  $B$ . Wegen  $Pe_j = v_j$  zeigt das  $B = P^{-1}AP$ .  $\square$

Satz 4.38 zusammen mit Lemma 4.40 liefert das folgende Resultat.

**Korollar 4.41.** *Eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie einer Diagonalmatrix ähnlich ist.*

Um nun für eine gegebene  $n \times n$ -Matrix  $A$  festzustellen, ob sie diagonalisierbar ist, müssen wir zunächst die Eigenwerte von  $A$  bestimmen. Ein Skalar  $\lambda \in K$  ist genau dann ein Eigenwert von  $A$ , wenn  $A$  einen Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$  hat, also das Gleichungssystem  $Ax = \lambda x$  eine von 0 verschiedene Lösung hat. Das Gleichungssystem können wir als  $(A - \lambda E_n)x = 0$  umschreiben. Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystem  $(A - \lambda E_n)x = 0$  nennen wir den *Eigenraum* der Matrix  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Man beachte, dass der Eigenraum von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  genau aus den Eigenvektoren von  $A$  zusammen mit dem 0-Vektor besteht.

Das homogene Gleichungssystem  $(A - \lambda E_n)x = 0$  hat genau dann eine von 0 verschiedene Lösung, wenn die Matrix  $A - \lambda E_n$  einen Rank  $< n$  hat und damit nicht invertierbar ist.  $A - \lambda E_n$  ist genau dann nicht invertierbar, wenn  $\text{Det}(A - \lambda E_n) = 0$  ist.  $\text{Det}(A - \lambda E_n)$  ist ein Polynom vom Grad  $n$  in der Unbestimmten  $\lambda$ , das *charakteristische Polynom*  $\chi_A(\lambda)$  der Matrix  $A$ .

Wir haben gerade den folgenden Satz bewiesen:

**Satz 4.42.** *Die Eigenwerte einer Matrix  $A \in K^{n \times n}$  sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\chi_A(\lambda)$ .*

Damit ergibt sich folgendes Verfahren zum Diagonalisieren einer Matrix  $A$ :

- (1) Bestimme die verschiedenen Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  des charakteristischen Polynoms  $\chi_A(\lambda)$ .
- (2) Für jedes  $i \in \{1, \dots, r\}$  bestimme eine Basis des Eigenraumes von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_r$ , also eine Basis der Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystem  $(A - \lambda_r E_n)x = 0$ .
- (3) Die Vereinigung der Basen der Eigenräume von  $A$  zu den verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  ist eine linear unabhängige Familie von Vektoren. Wenn das insgesamt  $n$  Vektoren sind, wenn also die Summe der Dimensionen der Eigenräume von  $A$  insgesamt  $n$  ist, so ist  $A$  diagonalisierbar und wir haben eine Basis von  $K^n$  gefunden, die aus Eigenvektoren der Matrix  $A$  besteht.

**Beispiel 4.43.** a) Wir diagonalisieren die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  über  $\mathbb{R}$ . Das charakteristische Polynom lautet

$$\text{Det}(A - \lambda E_2) = \text{Det} \begin{pmatrix} 6 - \lambda & -1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (6 - \lambda)(3 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 9\lambda + 20.$$

Die Nullstellen können wir mit der  $p - q$ -Formel bestimmen. Sie lauten  $\lambda_1 = 4$  und  $\lambda_2 = 5$ .

Nun bestimmen wir Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten. Dazu lösen wir zunächst das Gleichungssystem  $(A - \lambda_1 E_2)x = 0$ , also das lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix  $\begin{pmatrix} 6 - 4 & -1 \\ 2 & 3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ . Scharfes Hinsehen zeigt, dass die Lösungen dieses Gleichungssystems genau die Vielfachen des Vektors  $(1, 2)$  sind. Insbesondere ist  $(1, 2)$  ein Eigenvektor zum Eigenwert 4.

Als nächstes lösen wir das Gleichungssystem  $(A - \lambda_2 E_2)x = 0$ , also das lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix  $\begin{pmatrix} 6 - 5 & -1 \\ 2 & 3 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ . Wieder gucken wir scharf hin und sehen, dass alle Lösungen dieses Gleichungssystems Vielfache von  $(1, 1)$  sind. Insbesondere ist  $(1, 1)$  ein Eigenvektor zum Eigenwert 5. Damit ist  $(1, 2), (1, 1)$  eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ , die aus Eigenvektoren von  $A$  besteht.

Wir tragen diese Vektoren als Spalten in eine Matrix ein und erhalten  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . In der bekannten Weise berechnen wir die zu  $P$  inverse Matrix  $P^{-1}$  und erhalten  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .  $P^{-1}$  ist die Matrix der Koordinatenabbildung bezüglich der Basis  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ . Es gilt

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

b) Wir betrachten jetzt die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\chi_B(\lambda) = \text{Det} \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda).$$

Damit sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms genau  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_2 = 3$ . Wir führen die analogen Rechnungen zu Teil a) durch und erhalten folgende Ergebnisse: Der Eigenraum zum Eigenwert 2 besteht aus allen Vielfachen von  $(1, 0, 0)$  und ist damit

eindimensional. Der Eigenraum zum Eigenwert 3 besteht aus allen Vielfachen von  $(0, 0, 1)$  und ist damit eindimensional. Weitere Eigenvektoren gibt es nicht. Die zwei Vektoren  $(1, 0, 0)$  und  $(0, 0, 1)$  bilden noch keine Basis von  $\mathbb{R}^3$ . Damit ist die Matrix  $B$  nicht diagonalisierbar. Das sieht man daran, dass sich die Dimensionen der verschiedenen Eigenräume nicht zu  $n = 3$  aufsummieren.



**Teil 2**

**Analysis**



## Reelle Zahlen, Folgen und Konvergenz

Im Mittelpunkt der Analysis stehen Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auf den reellen Zahlen oder allgemeiner Funktionen zwischen  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$ . Im ersten Teil der Vorlesung im Wintersemester hatten wir besprochen, wie die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  (bzw.  $\mathbb{N}_0$ ) aus den Zermelo–Fraenkel–Axiomen der Mengenlehre als minimale induktive Menge konstruiert werden können. Alternativ haben wir die natürlichen Zahlen mithilfe der Peano–Axiome axiomatisch eingeführt. Aus den natürlichen Zahlen hatten wir dann mit geeigneten Äquivalenzrelationen die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  und die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  konstruiert.

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  kann man auch axiomatisch einführen oder auf verschiedene Arten aus  $\mathbb{Q}$  heraus konstruieren. Wir werden die reellen Zahlen zunächst axiomatisch im nächsten Abschnitt einführen und eine Konstruktion mithilfe von rationalen Cauchy–Folgen im letzten Abschnitt dieses Kapitels vorstellen.

### §5.1 AXIOMATISCHE EINFÜHRUNG DER REELLEN ZAHLEN

Wir erinnern uns an die Definition von *Körpern*  $\mathbb{K}$  als Menge mit (assoziativen, kommutativen und invertierbaren) Operationen  $+$  und  $\cdot$  und ausgezeichneten Konstanten  $0$  und  $1$ , welche die jeweiligen neutralen Elemente der Operationen darstellen. Darüber hinaus gelten die Distributivgesetze für die natürliche Verrechnung der Operationen bei geklammerten Ausdrücken. Die reellen Zahlen sind eines der Standardbeispiele von Körpern. Im Unterschied zu z. B. endlichen Körpern  $\mathbb{F}_p$  ist der Körper der reellen Zahlen wie auch der der rationalen Zahlen *angeordnet*.

**Definition 5.1.** Ein Körper  $\mathbb{K}$  ist angeordnet, wenn es eine Relation  $<$  auf  $\mathbb{K}$  gibt, sodass für alle  $x, y, z \in \mathbb{K}$  gilt

- (O1) es gilt genau eine der Relationen  $x < y$ ,  $x = y$ , oder  $x > y$ .  
(Totalordnung/Antisymmetrie)
- (O2) falls  $x < y$  und  $y < z$  gilt, dann folgt  $x < z$ .  
(Transitivität)
- (O3) falls  $x < y$ , dann folgt  $x + z < y + z$ .  
(Verträglichkeit mit  $+$ )
- (O4)  $x < y$  und  $z > 0$ , dann folgt  $x \cdot z < y \cdot z$ .  
(Verträglichkeit mit  $\cdot$ )

Wie üblich schreiben wir in angeordneten Körpern für  $x < y$  oder  $x = y$  abkürzend einfach  $x \leq y$ .

Aus den Anordnungsaxiomen folgt, dass wir die natürlichen Zahlen mit ihrer Ordnung in jedem angeordneten Körper  $\mathbb{K}$  wieder finden. Da  $\mathbb{K}$  ein Körper ist, wissen wir bereits  $0 \neq 1$ . Nimmt man an, dass  $1 < 0$  gilt, dann folgt mit (O3)  $1 + (-1) < 0 + (-1)$  und

somit würde  $0 < -1$  gelten. Dies ergibt aber einen Widerspruch, da aus der Annahme  $1 < 0$  mit  $0 < -1$  und  $(O_4)$  folgen würde  $-1 = 1 \cdot (-1) < 0 \cdot (-1) = 0$ . Es gilt also in jedem angeordneten Körper  $\mathbb{K}$

$$0 < 1. \quad (5.1)$$

Durch wiederholte Anwendungen von  $(O_3)$  mit  $z = 1$  erhalten wir

$$0 < 1 < 1 + 1 =: 2 < 2 + 1 =: 3 < \dots \quad (5.2)$$

Des Weiteren haben angeordnete Körper die Eigenschaft, dass sie relativ dicht sind und die Elemente nicht einfach der Ordnung entsprechend aufgezählt werden können. Genauer gilt, dass zwischen zwei Elementen immer noch ein weiteres Element liegt.

**Lemma 5.2.** *Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $x, y \in \mathbb{K}$  mit  $x < y$ . Dann liegt das arithmetische Mittel  $(x + y)/2$  zwischen  $x$  und  $y$ , d. h.*

$$x < \frac{x + y}{2} < y.$$

BEWEIS. Wir zeigen erst, dass  $1/2 = 2^{-1}$  größer 0 gilt. Falls nämlich  $1/2 < 0$ , dann würde mit  $2 > 0$  (siehe (5.2)) wegen  $(O_4)$  folgen

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \stackrel{(O_4)}{<} 0 \cdot 2 = 0,$$

was ein Widerspruch zu (5.1) darstellt. Es gilt also  $1/2 > 0$ .

Die Aussage folgt nun direkt aus den Ordnungseigenschaften  $(O_3)$  und  $(O_4)$ . Es gilt

$$2x = x + x \stackrel{(O_3)}{<} x + y \stackrel{(O_3)}{<} y + y = 2y$$

und da  $1/2 > 0$  ist, ergibt sich die gesuchte Ungleichung indem wir die Ungleichungskette mit  $1/2$  multiplizieren aus  $(O_4)$ .  $\square$

Was die reellen Zahlen von den rationalen Zahlen unterscheidet, ist die *Vollständigkeit*.

**Definition 5.3.** *Ein angeordneter Körper  $\mathbb{K}$  ist vollständig, falls für alle nichtleeren Mengen  $X, Y \subseteq \mathbb{K}$  mit  $x < y$  für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$ , ein  $z \in \mathbb{K}$  existiert, sodass*

$$x \leq z \leq y$$

für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$  gilt.

Das Vollständigkeitsaxiom besagt, dass die reellen Zahlen keine Lücken haben: Wenn die Menge  $X \subseteq \mathbb{R}$  „links“ von der Menge  $Y \subseteq \mathbb{R}$  auf dem Zahlenstrahl liegt, dann gibt es ein  $z \in \mathbb{R}$ , welches zwischen  $X$  und  $Y$  liegt. Die rationalen Zahlen haben dagegen Lücken: Seien

$$X = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ und } x^2 \leq 2\} \quad \text{und} \quad Y = \{y \in \mathbb{Q} : y > 0 \text{ und } y^2 > 2\}.$$

Dann gibt es kein  $z \in \mathbb{Q}$ , sodass für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$  die Ungleichungen  $x \leq z \leq y$  gelten. Der einzige Kandidat für so ein  $z$  wäre  $\sqrt{2}$ , aber  $\sqrt{2}$  ist keine rationale Zahl.

Zusammen sind die Körperaxiome, die Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom die Axiome der reellen Zahlen, die wir mit  $\mathbb{R}$  bezeichnen. Die reellen Zahlen sind also ein vollständig angeordneter Körper (so wie die natürlichen Zahlen eine Menge sind, die die Peano-Axiome erfüllt). Tatsächlich kann man auch zeigen, dass alle vollständigen angeordneten Körper isomorph sind und somit sind (bis auf Isomorphie) die reellen Zahlen der einzige solche Körper.

## §5.2 ANGEORDNETE KÖRPER

Folgende Eigenschaften angeordneter Körper lassen sich leicht aus den Anordnungsaxiomen in Definition 5.1 ableiten. Wir formulieren die Sätze allgemein für angeordnete Körper. Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  und die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  sind hier die Standardbeispiele für solche Körper.

**Satz 5.4.** *Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und seien  $x, y, z, w \in \mathbb{K}$ . Dann gilt:*

- (i) falls  $x < y$  und  $z < w$ , dann ist  $x + z < y + w$ .
- (ii) falls  $x < y$  und  $z < 0$ , dann ist  $xz > yz$ .
- (iii) falls  $0 < x < y$ , dann ist  $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ .
- (iv) für alle  $x > 0$  und alle  $y > 0$  gilt  $x < y$  genau dann, wenn  $x^2 < y^2$ .

- BEWEIS.**
- (i) Sei  $x < y$  und  $z < w$ . Nach (O3) aus Definition 5.1 gilt somit  $x + z < y + z$  und  $z + y < w + y$  und wegen der Kommutativität folgt aus der Transitivität (O2) auch die geforderte Ungleichung  $x + z < y + z < y + w$ .
  - (ii) Nach (O3) folgt aus  $z < 0$  durch Addition von  $-z$  die Ungleichung  $0 < -z$  und aus  $x < y$  folgt mittels (O4) die Ungleichung  $x(-z) < y(-z)$ , also gilt  $-xz < -yz$ . Addition von  $xz + yz$  auf beiden Seiten liefert mit (O3) dann die gesuchte Ungleichung  $yz < xz$ .
  - (iii) Für  $0 < x$  und  $0 < y$  folgt nach (O4) die Ungleichung  $0 = 0 \cdot y < xy$ . Wäre  $\frac{1}{xy} < 0$ , so könnte man mit  $xy$  multiplizieren und würde  $1 < 0 \cdot xy = 0$  erhalten, im Widerspruch zu (5.1). Also gilt  $0 < \frac{1}{xy}$ . Multipliziert man nun die gegebene Ungleichungskette  $0 < x < y$  mit  $\frac{1}{xy} > 0$ , so ergibt sich  $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$  nach (O4).
  - (iv) Ist  $0 < x < y$ , so erhält durch Multiplikation mit  $x$  beziehungsweise  $y$  wegen (O4) die Ungleichungen  $x^2 < xy$  und  $xy < y^2$ . Aus der Transitivität (O2) folgt  $x^2 < y^2$ .

Umgekehrt gelte nun  $x^2 < y^2$ . Dann muss  $x \neq y$  sein, da sonst  $x^2 = y^2$  wäre. Wäre  $y < x$ , so würde (wie ersten Teil des Beweises von (iv)) die der Annahme widersprechende Ungleichung  $y^2 < x^2$  gelten. Also muss nach Ausschlussprinzip mit Blick auf (O1) die Ungleichung  $x < y$  gelten.  $\square$

Aus diesem Satz und den Axiomen für die lineare Ordnung  $<$  können wir folgende Regeln für die Relation  $\leq$  ableiten.

**Korollar 5.5.** *Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und seien  $x, y, z, w \in \mathbb{K}$ . Dann gilt:*

- (a) falls  $x \leq y$  und  $y \leq z$ , dann gilt  $x \leq z$ . (Transitivität)  
 (b) falls  $x \leq y$  und  $z \leq w$ , dann gilt  $x + z \leq y + w$ . (Verträglichkeit mit +)  
 (c) falls  $x \leq y$  und  $z \geq 0$ , dann gilt  $xz \leq yz$ . (Verträglichkeit mit ·)  
 (d) falls  $x \leq y$  und  $z \leq 0$ , dann gilt  $xz \geq yz$ .

Die Aussagen ergeben sich direkt aus den entsprechenden Aussagen für  $<$  und wir lassen den Beweis zur Übung.

**Beispiel 5.6.** Wir wollen diejenigen  $x \in \mathbb{R}$  bestimmen, für die die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{3x + 1}{x} < 4.$$

Zunächst stellen wir fest, dass die linke Seite der Ungleichung nicht definiert ist, falls  $x = 0$  ist. Damit gilt die Ungleichung auch nicht für  $x = 0$ .

Nun betrachten wir den Fall  $x > 0$ . In diesem Fall gilt

$$\frac{3x + 1}{x} < 4 \iff 3x + 1 < 4x \iff 1 < x.$$

Ist  $x > 1$ , so gilt natürlich auch  $x > 0$ . Damit gilt die Ungleichung für alle  $x > 1$ .

Falls  $x < 0$  ist, so gilt

$$\frac{3x + 1}{x} < 4 \iff 3x + 1 > 4x \iff 1 > x.$$

Wenn  $x < 0$  ist, so gilt auch  $x < 1$ . Damit gilt die Ungleichung auch für alle  $x < 0$ .

Also ist die Menge  $L$  aller  $x \in \mathbb{R}$ , für die die Ungleichung erfüllt ist, die Menge

$$L = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}.$$

### §5.3 VOLLSTÄNDIGKEIT

In diesem Abschnitt gehen wir auf das Vollständigkeitsaxiom (Definition 5.3) ein, welches  $\mathbb{R}$  von  $\mathbb{Q}$  unterscheidet. Das Vollständigkeitsaxiom hat viele äquivalente Formulierungen, die manchmal einfacher anzuwenden sind. Im Folgenden wollen wir einige dieser Formulierungen und weitere Konsequenzen ableiten.

Wir beginnen mit dem Schnittaxiom für Dedekind'sche Schnitte.

**Satz 5.7** (Schnittaxiom). *Für jede Partition  $X \cup Y = \mathbb{R}$  mit*

- (a)  $X$  und  $Y$  sind nichtleer und  
 (b)  $x < y$  für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$ ,

*existiert genau ein  $z \in \mathbb{R}$  mit  $x \leq z \leq y$  für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$ .*

Das Schnittaxiom unterscheidet sich von unserer Wahl der Vollständigkeit insofern, dass nur spezielle Mengen  $X$  und  $Y$  betrachtet werden dürfen. Dafür ist aber das „Zwischenelement“  $z$  eindeutig bestimmt.

**BEWEIS.** Die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  liefert uns bereits die Existenz von einem  $z \in \mathbb{R}$  mit der gesuchten Eigenschaft und wir müssen nur die Eindeutigkeit zeigen.

Angenommen  $z_1 < z_2$  erfüllen beide  $x \leq z_1 < z_2 \leq y$  für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$ . Dann erfüllt aber nach Lemma 5.2 auch  $\bar{z} = (z_1 + z_2)/2$  diese Eigenschaft. Da  $X \cup Y$  die reellen Zahlen partitioniert, müssen nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei der Elemente von  $z_1 < \bar{z} < z_2$  in  $X$  oder in  $Y$  enthalten sein. Seien  $z' < z''$  diese beiden Elemente. Falls beide in  $X$  enthalten sind, dann erhalten wir den Widerspruch  $x = z'' > z'$  zu  $x \leq z'$  für alle  $x \in X$ . Analog erhalten wir den Widerspruch  $y = z' < z''$  zu der Aussage  $z'' \leq y$  für alle  $y \in Y$  in dem anderen Fall.  $\square$

Als nächstes wollen wir das *Supremums-/Infimumsprinzip* besprechen. Dafür benötigen wir die folgenden Definitionen.

**Definition 5.8.** Eine nichtleere Menge  $X \subseteq \mathbb{R}$  heißt nach unten (bzw. oben) beschränkt, falls es ein  $a \in \mathbb{R}$  (bzw.  $b \in \mathbb{R}$ ) gibt, sodass  $x \in X$  gilt

$$a \leq x \quad (\text{bzw. } x \leq b).$$

Jedes solche  $a \in \mathbb{R}$  (bzw.  $b \in \mathbb{R}$ ) wird untere (bzw. obere) Schranke genannt. Ist  $X \subseteq \mathbb{R}$  nach unten und nach oben beschränkt, so sagen wir einfach  $X$  ist beschränkt.

Eine untere Schranke  $a \in \mathbb{R}$  ist das Infimum von  $X$  und wird mit  $\inf(X)$  bezeichnet, wenn es keine untere Schranke  $a' > a$  von  $X$  gibt. Entsprechend ist eine obere Schranke ein Supremum  $\sup(X)$  von  $X$ , wenn es keine obere Schranke  $b' < b$  von  $X$ .

Falls das Infimum von  $X$  existiert und  $\inf(X) \in X$ , dann heißt  $\inf(X)$  auch Minimum von  $X$  und wird mit  $\min(X)$  bezeichnet. Genauso hat die Menge  $X$  ein Maximum, falls  $\sup(X)$  existiert und in  $X$  liegt.

Man kann sich leicht überlegen, dass endliche nichtleere Mengen immer ein Minimum und ein Maximum enthalten und wir hatten mittels vollständiger Induktion bei der Einführung der natürlichen Zahlen gezeigt, dass jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen ein Minimum hat.

Das Infimum und das Supremum einer Menge ist die größte untere bzw. die kleinste obere Schranke, falls diese existieren. Diese Begriffe relaxieren also die Konzepte von Minimum und Maximum, da darauf verzichtet wird, dass  $\sup(X)$  und  $\inf(X)$  in  $X$  liegen.

**Beispiel 5.9.** (a) Sei  $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ . Dann ist  $\sup(X) = 1$  und  $\inf(X) = 0$ .

Dabei ist  $1 \in X$  und  $0 \notin X$ , d. h. 1 ist sogar ein Maximum von  $X$ , aber  $X$  hat kein Minimum.

(b) Sei  $Y = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ . Dann ist  $\sup(Y) = \sqrt{2} \notin Y$  und  $\inf(Y) = -\sqrt{2} \notin Y$ .

Die Menge  $Y$  aus dem Beispiel ist eine beschränkte Menge in  $\mathbb{Q}$  (z. B. sind  $-3/2$  und  $3/2$  jeweils eine untere und eine obere Schranke in  $\mathbb{Q}$ ), die aber kein Infimum oder Supremum in  $\mathbb{Q}$  hat. Das Infimum und Supremum von  $Y$  liegt in  $\mathbb{R}$ . Als Teilmenge von  $\mathbb{R}$  hat  $Y$  also ein Supremum und ein Infimum. Im Allgemeinen folgt aus der

Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ , dass jede beschränkte nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ein Infimum und ein Supremum in  $\mathbb{R}$  hat.

**Satz 5.10** (Supremums-/Infimumsprinzip). *Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge  $Z \subseteq \mathbb{R}$  hat ein Supremum  $\sup(Z) \in \mathbb{R}$  und jede nichtleere nach unten beschränkte Menge  $Z' \subseteq \mathbb{R}$  hat ein Infimum  $\inf(Z') \in \mathbb{R}$*

BEWEIS. Wir nehmen an, dass  $\sup(Z)$  nicht existiert. Sei  $Y$  die Menge aller oberen Schranken von  $Z$ . Nach Voraussetzung ist  $Y \neq \emptyset$  und da wir annehmen, dass  $\sup(Z)$  nicht existiert, gilt insbesondere

$$Z \cap Y = \emptyset.$$

Sei  $X = \mathbb{R} \setminus Y$  das Komplement von  $Y$ , welches dann  $Z$  enthalten muss und  $X \supseteq Z \neq \emptyset$  ergibt. Da kein  $x \in X$  eine obere Schranke für  $Z$  ist, gibt es für jedes  $x \in X$  ein  $z \in Z$  mit  $x < z$ . Jede obere Schranke  $y \in Y$  ist mindestens so groß wie  $z$  also gilt auch

$$x < z \leq y$$

für alle  $y \in Y$ . Wir können also das Schnittaxiom aus Satz 5.7 anwenden und dieses garantiert genau ein  $\hat{z} \in \mathbb{R}$ , welches zwischen  $X$  und  $Y$  liegt. Da  $\hat{z} \geq x$  für alle  $x \in X \supseteq Z$ , ist  $\hat{z}$  eine obere Schranke von  $X$ . Da aber auch  $\hat{z} \leq y$  für alle  $y \in Y$ , ist  $\hat{z}$  die kleinste obere Schranke und wir erhalten den Widerspruch  $\hat{z} = \sup(Z)$ .

Der Beweis für das Infimumsprinzip ist analog.  $\square$

Eine weitere wichtige Eigenschaft der reellen Zahlen ist die *Archimedische Eigenschaft*, welche besagt, dass  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$  nach oben nicht beschränkt ist.

**Satz 5.11** (Archimedische Eigenschaft). *Für alle  $x \in \mathbb{R}$  existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x \leq n$ .*

BEWEIS. Angenommen  $\mathbb{N}$  ist nach oben beschränkt. Dann existiert wegen dem Supremumsprinzip ein Supremum  $\sup(\mathbb{N}) \in \mathbb{R}$ . Da  $\sup(\mathbb{N})$  die kleinste obere Schranke ist, existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\sup(\mathbb{N}) - 1 \leq n$ , aber dann ist  $\sup(\mathbb{N})$  nicht mehr mindestens so groß wie die natürliche Zahl  $n + 1$ , was ein Widerspruch ist.  $\square$

Die folgende Aussage erhält man als einfache Konsequenz der Archimedischen Eigenschaft.

**Korollar 5.12.** *Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\varepsilon > 1/n > 0$ .*

BEWEIS. Für gegebenes  $\varepsilon > 0$  wenden wir Satz 5.11 mit  $x = 1/\varepsilon$  an und erhalten ein  $n' \in \mathbb{N}$  mit  $n' \geq x$ . Dann gilt für  $n = n' + 1$  auch  $x < n$  und somit  $\varepsilon = 1/x > 1/n$ .  $\square$

Zum Schluß zeigen wir, dass die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen liegen. Genauer zeigen wir, dass zwischen zwei reellen Zahlen immer eine rationale liegt.

**Satz 5.13.** *Für je zwei reelle Zahlen  $x < y$  existiert ein  $q \in \mathbb{Q}$  mit  $x < q < y$ .*

BEWEIS. Nach Korollar 5.12 angewandt mit  $\varepsilon = y - x$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$ , sodass

$$0 < \frac{1}{n} < y - x \quad \Longrightarrow \quad 1 < n(y - x) \quad \Longrightarrow \quad nx + 1 < ny.$$

Sei  $m$  die kleinste ganze Zahl, die größer als  $nx$  ist, d. h.  $m = \lfloor nx \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$ . Es gilt also

$$nx < m \leq nx + 1 < ny.$$

Teilen wir diese Ungleichungskette durch  $n$  ergibt  $x < m/n < y$  und somit hat die rationale Zahl  $q = m/n \in \mathbb{Q}$  die gesuchte Eigenschaft.  $\square$

Genau genommen haben wir in dem Beweis benutzt, dass die Gauß-Klammer

$$\lfloor \xi \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq \xi\}$$

für jede reelle Zahl  $\xi \in \mathbb{R}$  existiert. Für  $\xi \geq 0$  gilt

$$\sup\{z \in \mathbb{Z} : z \leq \xi\} = \sup\{z \in \mathbb{Z} : z \geq 0 \text{ und } z \leq \xi\}$$

und  $\lfloor \xi \rfloor$  ist somit das größte Element einer endlichen Menge, welches immer existiert. Für  $\xi < 0$  gilt dann

$$\lfloor \xi \rfloor = -\lfloor -\xi \rfloor - 1.$$

Die Vollständigkeit ist zentral für das Konvergenzverhalten von reellen Folgen, welches wir in Abschnitt 5.6 genauer besprechen (siehe Sätze 5.32, 5.34 und 5.35).

#### §5.4 BETRAG UND INTERVALLE REELLER ZAHLEN

Wir erinnern an die Definition des *Betrages*/*Absolutbetrages* einer reellen Zahl.

**Definition 5.14** (Betrag). *Der Betrag  $|x|$  einer reellen Zahl  $x$  ist wie folgt definiert:*

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Anschaulich ist der Betrag  $|x|$  der Abstand von  $x$  zur 0.

**Satz 5.15.** *Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:*

- (i)  $|x| \geq 0$  und  $|x| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$  ist. (positiv definit)
- (ii)  $|xy| = |x| \cdot |y|$ . (homogen)
- (iii)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ . (Dreiecksungleichung)
- (iv) Falls  $y \neq 0$  ist, so gilt

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

- (v)  $|x - y| \geq |x| - |y|$ .

BEWEIS. Alle Aussagen lassen sich leicht mit Hilfe von Fallunterscheidungen nach der Verteilung der Vorzeichen von  $x$  und  $y$  beweisen. Die Eigenschaften (i)–(iii) haben wir bereits in Teil (ii) von Satz 1.7 für  $n = 1$  gesehen und stimmen mit diesen überein. Teil (iv) folgt aus (ii), angewandt mit  $y' = 1/y$ . Teil (v) folgt aus der Dreiecksungleichung (iii) durch

$$|x| = |x - y + y| \stackrel{(iii)}{\leq} |x - y| + |y|$$

und umstellen. □

Mittels vollständiger Induktion lassen sich die Homogenität und die Dreiecksungleichung auf mehr als zwei Faktoren bzw. Summanden verallgemeinern. Für alle reellen Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  gilt

$$\left| \prod_{i=1}^n x_i \right| = \prod_{i=1}^n |x_i| \quad \text{und} \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Beim Rechnen mit Beträgen müssen oft Fallunterscheidungen getroffen werden. So ist zum Beispiel

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x, & \text{falls } 2 \geq x \\ x - 2, & \text{falls } 2 < x. \end{cases}$$

Die Idee, dass der Betrag einer Zahl den Abstand zur 0 angibt, verallgemeinern wir mit der folgenden Definition.

**Definition 5.16** (Abstand). Für  $x, y \in \mathbb{R}$  nennen wir die Zahl  $|x - y|$  den Abstand von  $x$  und  $y$ .

**Beispiel 5.17.** (a) Sei  $x = 2$  und  $y = 8$ . Dann gilt für den Abstand

$$|x - y| = |2 - 8| = |-6| = 6.$$

(b) Sei  $x = -3$  und  $y = 4$ . Dann ist der Abstand  $|x - y| = |-3 - 4| = |-7| = 7$ .

(c) Sei  $x = -3$  und  $y = -12$ . Dann ist  $|x - y| = |-3 - (-12)| = |-3 + 12| = |9| = 9$ .

Die folgenden Rechenregeln für den Abstand zweier reeller Zahlen folgen aus den Eigenschaften des Betrages.

**Satz 5.18.** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

- (i)  $|x - y| \geq 0$  und  $|x - y| = 0$  gilt genau dann, wenn  $x = y$  ist.
- (ii)  $|x - y| = |y - x|$ . (Symmetrie)
- (iii)  $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ . (Dreiecksungleichung)

BEWEIS. (i) Wir wissen durch Eigenschaft (i) aus Satz 5.15, dass  $|\xi| \geq 0$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}$  gilt und somit ist auch  $|x - y| \geq 0$ . Weiterhin gilt  $|\xi| = 0$  genau dann, wenn  $\xi = 0$  ist. D. h. der Abstand  $|x - y|$  ist genau dann Null, wenn  $x - y = 0$  und somit  $x = y$  gilt.

(ii) Aus Homogenität (ii) aus Satz 5.15 des Betrages folgt

$$|x - y| = 1 \cdot |x - y| = |-1| \cdot |x - y| \stackrel{(ii)}{=} |(-1)(x - y)| = |y - x|.$$

(iii) Die Dreiecksungleichung des Abstandes folgt direkt aus der Dreiecksungleichung des Betrages in (iii) aus Satz 5.15, da

$$|x - z| = |x - y + y - z| = |(x - y) + (y - z)| \stackrel{(iii)}{\leq} |x - y| + |y - z|.$$

□

**Definition 5.19** (Intervalle). Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Dann definieren wir folgende endliche Intervalle mit den Endpunkten  $a$  und  $b$ :

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

Dabei heißt  $[a, b]$  abgeschlossenes Intervall,  $(a, b)$  offenes Intervall und  $(a, b]$  und  $[a, b)$  halboffene Intervalle. Die Mengen

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

$$(-\infty, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

heißen unendliche Intervalle.

**Beispiel 5.20.** Die Lösungsmenge

$$L = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}.$$

aus Beispiel 5.6 kann dann in Intervallschreibweise als

$$L = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$$

geschrieben werden.

**Beispiel 5.21.** (a)  $[1, 3) \cup (2, 4] = [1, 4]$

(b)  $(-5, 3) \cap [1, \infty) = [1, 3)$

(c)  $\mathbb{R} \setminus (2, 3] = (-\infty, 2] \cup (3, \infty)$

## §5.5 KONVERGENTE FOLGEN UND GRENZWERTE

In der Analysis studieren wir abzählbar unendliche Sequenzen von reellen Zahlen und deren asymptotisches Verhalten. Solche Sequenzen nennen wir *Folgen*.

**Definition 5.22** (Folgen). *Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung  $\mathbf{a}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Anstelle von  $\mathbf{a}(n)$  schreibt man in diesem Zusammenhang oft  $a_n$ . Für die Folge  $\mathbf{a}$  schreiben wir auch  $(a_1, a_2, \dots)$  oder  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder einfach  $(a_n)$ . Die Zahl  $a_n$  ist das  $n$ -te Glied der Folge  $\mathbf{a}$ .*

Wir werden oft auch Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  oder  $(b_i)_{i \in I}$  betrachten, deren Indizes  $\mathbb{N}_0$  oder allgemeiner eine unendliche nach unten beschränkte Teilmenge  $I \subseteq \mathbb{Z}$  sind. Für eine unendliche Teilmenge  $J \subseteq I$  erhalten wir eine *Teilfolge*  $(b_j)_{j \in J}$  von der Folge  $(b_i)_{i \in I}$ .

**Beispiel 5.23.** (a) Wir betrachten die Folge mit den Gliedern  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_3 = \frac{1}{3}$  und so weiter. Allgemein sei also  $a_n = \frac{1}{n}$ .  
 (b) Sei  $a_1 = 1^2$ ,  $a_2 = 2^2$ ,  $a_3 = 3^2$  und so weiter. Allgemein sei also  $a_n = n^2$ .  
 (c) Wir betrachten die Folge  $(-1, 3, -1, 3, \dots)$ . Das  $n$ -te Folgenglied  $a_n$  ist also  $-1$ , falls  $n$  ungerade ist, und sonst  $3$ . Die Folge oszilliert also zwischen den Werten  $-1$  und  $3$ .

Ein zentraler Begriff der Analysis ist die Konvergenz von Folgen.

**Definition 5.24** (Konvergenz). *Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen konvergiert gegen eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$ , falls es für jede reelle Zahl  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, sodass für alle  $n \geq n_0$  die Ungleichung*

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

*gilt. Falls die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$  konvergiert, so schreiben wir*

$$a_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a.$$

*Wir nennen dann  $a$  den Grenzwert der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Wenn es ein  $a$  mit  $a_n \rightarrow a$  gibt, so ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent. Falls kein solches  $a$  existiert, so ist die Folge divergent.*

Man beachte, dass  $|a_n - a|$  der Abstand zwischen dem Folgenglied  $a_n$  und der Zahl  $a$  ist. Ist  $a$  der Grenzwert der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder  $a_n$  in dem Intervall  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

**Beispiel 5.25.** (a) Da für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n < m$  die Ungleichung  $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$  gilt, nähert sich Folge  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  immer weiter an  $0$  an. Daher vermuten wir  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ . Um das nachzuweisen, müssen wir zeigen, dass für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $n \geq n_0$  die Ungleichung

$$\frac{1}{n} = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

gilt.

Wegen Korollar 5.12 existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $1/n_0 < \varepsilon$ . Für alle  $n \geq n_0$  gilt dann ebenfalls  $1/n \leq 1/n_0 < \varepsilon$  und das zeigt

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

(b) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $a_n = \frac{n-1}{n}$ . Dann gilt  $\frac{n-1}{n} \longrightarrow 1$ . Es gilt nämlich

$$\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n} \right| = \left| \frac{-1}{n} \right| = \frac{1}{n}.$$

Nach Beispiel (a) (bzw. nach Korollar 5.12) gibt es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq n_0$  die Ungleichung  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  gilt. In diesem Fall gilt also

$$\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

für alle  $n \geq n_0$ . Damit konvergiert die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen 1, d. h.

$$\frac{n-1}{n} \longrightarrow 1.$$

(c) Die Folge mit den Gliedern  $a_n = n$  divergiert. Sei z. B.  $\varepsilon = 1$ . Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  existiert nach Satz 5.11 ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $a \leq n_0 = a_{n_0}$ . Für alle  $n > n_0$  ist  $a_n$  mindestens  $a_{n_0} + 1$ . Damit gilt für unendlich viele  $n$  die Ungleichung  $|a_n - a| \geq 1$ . Also konvergiert  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht gegen  $a$  und da  $a \in \mathbb{R}$  beliebig war, gibt es keinen reellen Grenzwert der Folge. Die Folge ist also divergent.

(d) Sei  $a_n = -1$ , falls  $n$  ungerade ist, und  $a_n = 3$ , falls  $n$  gerade ist. Sei  $\varepsilon = 1$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Nach der Dreiecksungleichung (iii) aus Satz 5.18 für den Abstand gilt

$$4 = |(-1) - 3| \leq |(-1) - a| + |a - 3| = |a - (-1)| + |a - 3|$$

können nicht beide Abstände  $|(-1) - a|$  und  $|3 - a|$  kleiner oder gleich 1 sein. Damit gibt es unendlich viele  $n$  mit  $|a - a_n| > 1$ . Damit konvergiert die Folge nicht gegen  $a$  und die Folge ist divergent.

Offenbar verhalten sich die divergenten Folgen in (c) und (d) sehr unterschiedlich und dies führt zu folgender Definition.

**Definition 5.26.** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen divergiert bestimmt gegen  $\infty$  (bzw. gegen  $-\infty$ ), falls für alle  $x \in \mathbb{R}$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $n \geq n_0$  die Ungleichung  $a_n > x$  (bzw.  $a_n < x$ ) gilt. Falls eine divergente Folge nicht bestimmt divergiert, so divergiert sie unbestimmt. Falls  $(a_n)$  bestimmt gegen  $\infty$  divergiert, so schreiben wir

$$a_n \longrightarrow \infty \text{ für } n \longrightarrow \infty \quad \text{oder} \quad a_n \longrightarrow -\infty.$$

Falls  $(a_n)$  bestimmt gegen  $-\infty$  divergiert, so schreiben wir  $a_n \longrightarrow -\infty$  für  $n \longrightarrow \infty$  oder einfach  $a_n \longrightarrow -\infty$ .

Die Folge in Beispiel 5.25 (c) divergiert bestimmt gegen  $\infty$  und die Folge in Beispiel 5.25 (d) divergiert unbestimmt.

**Satz 5.27.** Für die Glieder einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gelte  $a_n > 0$ . Dann gilt  $a_n \rightarrow \infty$  genau dann, wenn  $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$  gilt.

BEWEIS. Es gelte  $a_n \rightarrow \infty$ . Um  $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$  nachzuweisen, betrachten wir ein beliebiges  $\varepsilon > 0$ . Wegen  $a_n \rightarrow \infty$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq n_0$  die Ungleichung  $a_n > 1/\varepsilon$  gilt. Es folgt  $\frac{1}{a_n} < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Damit gilt  $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ .

Umgekehrt gelte  $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ . Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Wir können  $x > 0$  annehmen und setzen  $\varepsilon := \frac{1}{x}$ . Dann existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq n_0$  die Ungleichung  $\frac{1}{a_n} = |\frac{1}{a_n}| < \varepsilon$  gilt. Also gilt für alle  $n \geq n_0$  auch  $a_n > \frac{1}{\varepsilon} = x$ . Damit gilt  $a_n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit der Beobachtung, dass Grenzwerte, falls sie existieren, eindeutig sind.

**Lemma 5.28.** Eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt höchstens einen Grenzwert.

BEWEIS. Angenommen, die beiden verschiedenen Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  sind Grenzwerte der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Da  $a$  und  $b$  verschieden sind, ist  $d = |a - b| > 0$ . Sei  $\varepsilon := \frac{d}{2}$ .

Wegen  $a_n \rightarrow a$  und  $a_n \rightarrow b$  existieren  $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq n_0$  und alle  $m \geq m_0$  gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |a_m - b| < \varepsilon$$

Sei nun  $n$  größer als das Maximum von  $n_0$  und  $m_0$ . Dann gilt gleichzeitig  $|a_n - a| < \varepsilon$  und  $|a_n - b| < \varepsilon$ . Also folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon = d = |a - b|,$$

ein Widerspruch.  $\square$

Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes, falls er existiert, schreiben wir auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder einfach} \quad \lim a_n = a$$

für  $a_n \rightarrow a$ . Auch für bestimmt divergierende Folgen schreiben wir genauso für *uneigentliche Grenzwerte*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \quad \text{oder einfach} \quad \lim b_n = \infty$$

für  $b_n \rightarrow \infty$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty \quad \text{oder einfach} \quad \lim c_n = -\infty$$

für  $c_n \rightarrow -\infty$ .

## §5.6 KONVERGENZKRITERIEN UND RECHENREGELN FÜR GRENZWERTE

Wir betrachten ein Beispiel einer Folge, die konvergiert, aber deren Grenzwert wir nicht so einfach raten können.

**Beispiel 5.29.** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Wir geben einige (gerundete) Werte für  $a_n$  an:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2.25$$

$$a_3 = 2.\overline{370}$$

$$a_4 = 2.44140625$$

$$a_{10} = 2.5937424601$$

$$a_{100} = 2.7048138294215260932671947108 \dots$$

$$a_{1000} = 2.7169239322358924573830881219 \dots$$

$$a_{1000000} = 2.7182804693193768838197997084 \dots$$

Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  scheint immer „langsamer zu wachsen“.

Wir zeigen, dass eine Folge wie in diesem Beispiel konvergiert, auch wenn wir den Grenzwert nur näherungsweise berechnen können.

**Definition 5.30.** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen heißt monoton steigend (oder auch monoton wachsend), falls für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $a_n \leq a_{n+1}$  gilt. Entsprechend definiert man monoton fallend.

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen heißt nach oben bzw. nach unten beschränkt, falls die Menge  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  der Folgenglieder nach oben bzw. nach unten beschränkt ist.

Man kann leicht einsehen, dass konvergente Folgen beschränkt sind.

**Lemma 5.31.** Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist beschränkt.

BEWEIS. Sei  $a = \lim a_n$ . Für  $\varepsilon = 1$  gibt es ein  $n_0$ , sodass  $|a_n - a| < 1$  für alle  $n \geq n_0$  gilt. D. h. für  $n \geq n_0$  liegen alle Folgenglieder  $a_n$  in dem offenen Intervall  $(a - 1, a + 1)$ . Seien  $\mu$  und  $\nu$  das Minimum und Maximum der ersten  $n_0$  Folgenglieder, d. h.

$$\mu = \min\{a_1, \dots, a_{n_0}\} \quad \text{und} \quad \nu = \max\{a_1, \dots, a_{n_0}\}.$$

dann folgt, dass die gesamte Folge von unten durch  $\min\{\mu, a - 1\}$  und von oben durch  $\max\{\nu, a + 1\}$  beschränkt.  $\square$

Das folgende Konvergenzkriterium besagt, dass monotone beschränkte Folgen einen Grenzwert haben, ohne den Grenzwert weiter zu bestimmen. Das Konvergenzkriterium ist eine Konsequenz der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  und der Beweis basiert auf dem Supremums-/Infimumsprinzip (siehe Satz 5.10).

**Satz 5.32.** *Jede monoton wachsende nach oben beschränkte Folge und jede monoton fallende nach unten beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert.*

**BEWEIS.** Wir zeigen den Satz nur für monoton wachsende Folgen. Für monoton fallende Folgen geht der Beweis entsprechend.

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge. Nach Satz 5.10 existiert das Supremum der Menge  $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  der Folgenglieder. Wir setzen  $a = \sup(A)$  und zeigen  $a_n \rightarrow a$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Da  $a$  das Supremum der Menge  $A$  ist, ist  $a - \varepsilon$  keine obere Schranke von  $A$ . Also existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $a - \varepsilon < a_{n_0}$ . Da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend ist, gilt für alle  $n \geq n_0$  die Ungleichung  $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a$ . Insbesondere gilt für alle  $n \geq n_0$  die Ungleichung  $|a_n - a| < \varepsilon$ . Es folgt also  $\lim a_n = a$ .  $\square$

Mittels Satz 5.32 können wir nun zeigen, dass die Folge  $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent ist, auch wenn wir vorerst keinen einfachen Ausdruck für den Grenzwert angeben können. In dem Beweis verwenden wir die Bernoulli–Ungleichung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für all } x \geq -1 \quad (5.3)$$

die wir als Beispiel einer vollständigen Induktion bereits im letzten Semester kennengelernt hatten.

**Korollar 5.33.** *Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  ist konvergent.*

**BEWEIS.** Wir zeigen, dass die Folge monoton wächst und beschränkt ist. Die Monotonie folgt aus der Ungleichung  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , die wir wie folgt etablieren

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = (1 + \frac{1}{n}) \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = (1 + \frac{1}{n}) \left( \frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}} \right)^{n+1} \\ &= (1 + \frac{1}{n}) \left( \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} \right)^{n+1} = (1 + \frac{1}{n}) \left( 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Wir wenden die Bernoulli–Ungleichung mit  $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$  und  $n+1$  an und erhalten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \stackrel{(5.3)}{\geq} (1 + \frac{1}{n}) \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = \left( \frac{n+1}{n} \right) \left( \frac{n}{n+1} \right) = 1.$$

Das zeigt, dass die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wächst.

Wir zeigen nun, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $a_n < 3$  gilt. Dazu berechnen wir  $a_n$  mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

$$a_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

Für  $k \in \mathbb{N}$  mit  $1 \leq k \leq n$  gilt

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k! \cdot n^k} \leq \frac{n^k}{k! \cdot n^k} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Mit dieser Abschätzung und mittels der geometrischen Summenformel:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

folgt nun

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3.$$

Also ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend und nach oben beschränkt und mit Satz 5.32 folgt, dass die Folge konvergiert.  $\square$

Den Grenzwert der Folge mit den Folgengliedern  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  nennt man die *Eulersche Zahl*  $e$ , d. h.

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (5.4)$$

Die ersten Stellen der Dezimaldarstellung lauten

$$e = 2.71828182845904\dots$$

Wir hatten bereits gesehen, dass konvergente Folgen beschränkt sind. Reelle Folgen, die nur beschränkt sind, enthalten zumindest eine konvergente Teilfolge. Dies ist der Satz von Bolzano–Weierstraß, der wiederum auf der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  (in Form von Satz 5.32) beruht.

**Satz 5.34** (Bolzano–Weierstraß). *Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge, die nach oben und unten beschränkt ist. Dann gibt es eine Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  die konvergiert.*

**BEWEIS.** Wir betrachten maximale Indizes der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wobei ein Index  $m \in \mathbb{N}$  *maximal* ist, falls  $a_n < a_m$  für alle  $n > m$  gilt.

Falls es unendlich viele maximale Indizes  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  gibt, dann ist  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Teilfolge. Diese Teilfolge ist, genau wie die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , nach unten beschränkt und nach Satz 5.32 konvergiert  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ .

Nehmen wir nun an, dass es nur endlich viele maximale Indizes  $n_1 < n_2 < \dots < n_\ell$  gibt. Dann gibt es für jedes  $n > n_\ell$  immer einen Index  $n' > n$  mit  $a_{n'} \geq a_n$ , da sonst  $n > n_\ell$  auch maximal wäre, welches im Widerspruch dazu steht dass  $n_1 < n_2 < \dots < n_\ell$  alle maximalen Indizes sind. So können wir aber rekursiv eine monoton wachsende Teilfolge wie folgt definieren. Wähle  $n_1 = n_\ell + 1$  und  $n_2 = n'_1 > n_1$  sei der Index mit  $a_{n_2} \geq a_{n_1}$ . Danach wählen wir  $n_3 = n'_2 > n_2$  mit  $a_{n_3} \geq a_{n_2}$  usw. Die dadurch entstehende Teilfolge  $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach oben beschränkt ist. Wieder folgt mit Satz 5.32, dass die Teilfolge  $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  konvergiert.  $\square$

Als nächstes halten wir noch ein wichtiges Kriterium für die Konvergenz von Folgen fest, dass wieder keine Information über den Grenzwert liefert.

**Satz 5.35** (Cauchy–Kriterium). *Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn zu jedem  $\delta > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $n, m \geq n_0$  folgende Ungleichung gilt:*

$$|a_n - a_m| < \delta.$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass jede konvergente Folge das Cauchy–Kriterium erfüllt. Um zu zeigen, dass jede *Cauchy–Folge*, also jede Folge, die das Kriterium erfüllt, konvergent ist, muss die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  benutzt werden und zwar diesmal in der Form vom Satz von Bolzano–Weierstraß.

**BEWEIS VON SATZ 5.35.** Wir werden zuerst zeigen, dass jede Cauchy–Folge beschränkt ist und somit nach Satz 5.34 eine konvergente Teilfolge enthält. Danach wird gezeigt, dass tatsächlich die ganze Cauchy–Folge den gleichen Grenzwert wie die Teilfolge hat.

Sei also  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy–Folge reeller Zahlen. Wir wenden zuerst das Cauchy–Kriterium mit  $\delta = 1$  an und erhalten einen Index  $n_0$ , sodass

$$|a_n - a_m| < 1$$

für alle  $n, m \geq n_0$  gilt. Seien  $\mu$  und  $\nu$  das Minimum und Maximum der ersten  $n_0$  Folgenglieder, d. h.

$$\mu = \min\{a_1, \dots, a_{n_0}\} \quad \text{und} \quad \nu = \max\{a_1, \dots, a_{n_0}\}.$$

Da  $|a_{n_0} - a_m| < 1$  für alle  $m \geq n_0$  gilt, haben wir auch

$$\mu - 1 \leq a_{n_0} - 1 < a_m < a_{n_0} + 1 \leq \nu + 1.$$

Demnach ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach unten durch  $\mu - 1$  und nach oben durch  $\nu + 1$  beschränkt. Wegen Satz 5.34 existiert also eine konvergente Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und sei

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$$

der Grenzwert der Teilfolge.

Wir werden zeigen, dass die ganze Folge gegen  $a$  konvergiert. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Wir wenden das Cauchy–Kriterium mit  $\delta = \varepsilon/2$  an und erhalten einen Index  $n'_0$ , sodass  $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$  für alle  $n, m \geq n'_0$  gilt. Aufgrund der Konvergenz der Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  gibt es auch einen Index  $k_0$ , sodass  $|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2$  für alle  $k \geq k_0$  gilt. Nun wählen wir  $n''_0 = \max\{n'_0, n_{k_0}\}$ . Dann folgt mit der Dreiecksungleichung für  $n \geq n''_0$  und ein beliebiges  $k$  mit  $n_k \geq n''_0$

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

wobei wir den erste Summanden durch  $\varepsilon/2$  mithilfe der Cauchy-Eigenschaft abschätzen konnten und der zweite Summand mithilfe der Konvergenz der Teilfolge durch  $\varepsilon/2$  abgeschätzt wurde.

Wir haben also gezeigt, dass es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0''$  gibt, sodass  $|a_n - a| \leq \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0''$  gilt und somit konvergiert die ganze Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$ .  $\square$

Wie beschließen diesen Abschnitt mit Rechenregeln für Grenzwerte.

**Satz 5.36.** *Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente Folgen reeller Zahlen mit den Grenzwerten  $a = \lim a_n$  und  $b = \lim b_n$ . Dann gilt:*

- (1) die Folge  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $a + b$ , d. h.  $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ .
- (2) die Folge  $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $a \cdot b$ , d. h.  $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$ .
- (3) die Folge  $(c \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für  $c \in \mathbb{R}$  konvergiert gegen  $c \cdot a$ , d. h.  $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$ .
- (4) die Folge  $(a_n/b_n)$  konvergiert gegen  $a/b$ , falls  $b \neq 0$  und  $b_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , d. h. in diesem Fall gilt

$$\lim \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

- (5) falls  $a_n \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, so gilt auch  $a \leq b$ , d. h.  $\lim a_n \leq \lim b_n$ .

BEWEIS. Wir beweisen nur die Rechenregeln (1) und (2). Die anderen Behauptungen lassen sich davon ableiten oder auf ähnliche Weise zeigen und werden als Übung gelassen.

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wegen  $a_n \rightarrow a$  gibt es  $n_1 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq n_1$  die Ungleichung  $|a_n - a| < \varepsilon/2$  gilt. Genauso folgt aus  $b_n \rightarrow b$  die Existenz von  $n_2 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq n_2$  die Ungleichung  $|b_n - b| < \varepsilon/2$  gilt. Sei  $n_0$  das Maximum von  $n_1$  und  $n_2$ . Dann gilt für alle  $n \geq n_0$ :

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Somit konvergiert  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a + b$  und (1) ist gezeigt.

Für den Beweis von (2). Da die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, ist sie nach Lemma 5.31 beschränkt und es gibt eine Konstante  $A > 0$ , sodass

$$|a_n| < A$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Sei

$$C = \max\{A, |b|\}$$

und  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Wir wählen  $n_0$  groß genug, sodass sowohl

$$|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{und} \quad |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$$

für alle  $n \geq n_0$  gilt. Für alle  $n \geq n_0$  folgt dann

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| = |a_n| |b_n - b| + |a_n - a| |b| \\ &\leq |a_n| \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C} \cdot |b| = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|a_n|}{C} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|b|}{C} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

und die Rechenregel (2) folgt.  $\square$

Es gibt auch Rechenregeln für bestimmt divergente Folgen, allerdings können Ausdrücke der Form  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty/\infty$  oder  $\infty - \infty$  nicht betrachtet werden, da hier ganz unterschiedliche Ergebnisse möglich sind. Exemplarisch geben wir folgende Rechenregel an:

(6) Gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  für ein  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ , so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a > 0, \text{ und} \\ -\infty, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

**Beispiel 5.37.** (a) Wir bestimmen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n^2+n-2}$ . Es gilt

$$\frac{2n-1}{3n^2+n-2} = \frac{n(2-\frac{1}{n})}{n^2(3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2})} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}.$$

Nach den oben genannten Grenzwertregeln gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}} \right) = 0 \cdot \frac{2}{3} = 0.$$

(b) Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+n-4}{-3n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{-3+\frac{1}{n^3}} = -\frac{2}{3}.$$

(c) Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+n-4}{-3n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \frac{2+\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{-3+\frac{1}{n^2}} \right) = -\frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} n = -\infty.$$

**Satz 5.38** (Einschließungssatz). *Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen reeller Zahlen, sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $a_n \leq b_n \leq c_n$  gilt. Die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seien konvergent mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a.$$

*Dann konvergiert auch  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , und zwar ebenfalls gegen  $a$ . Es gilt also*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

BEWEIS. Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$  gibt es natürliche Zahlen  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , sodass  $|a_n - a| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_1$  und  $|c_n - a| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_2$  gilt. Sei  $n_0$  das Maximum von  $n_1$  und  $n_2$ . Dann gilt für alle  $n \geq n_0$  mit  $b_n > a$

$$|b_n - a| = b_n - a \leq c_n - a = |c_n - a| < \varepsilon$$

und für alle  $n \geq n_0$  mit  $b_n \leq a$

$$|b_n - a| = a - b_n \leq a - a_n = |a_n - a| < \varepsilon.$$

Somit gilt  $|b_n - a| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$  und das zeigt  $b_n \rightarrow a$ .  $\square$

### §5.7 FOLGEN UND REIHEN

Wir beginnen mit einigen wichtigen Beispielfolgen.

**Beispiel 5.39.** Für  $c \in \mathbb{R}$  betrachten wir die Folge  $(c^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Das  $n$ -te Folgenglied ist also die Zahl  $c^n$ . Für das Konvergenzverhalten unterscheiden wir verschiedene Fälle in Abhängigkeit von  $c$ .

**1. Fall ( $c > 1$ ):** In diesem Fall ist  $c = 1 + b$  für ein  $b > 0$ . Wir zeigen, dass die Folge  $(c^n)_{n \in \mathbb{N}}$  bestimmt gegen  $\infty$  divergiert. Hierzu sei  $x > 0$  beliebig und wähle  $n_0 \geq \frac{x}{b}$ . Dann gilt für alle  $n \geq n_0$  mittels der Bernoulli-Ungleichung

$$c^n = (1 + b)^n \stackrel{(5.3)}{\geq} 1 + nb > nb \geq n_0 b \geq \frac{x}{b} \cdot b = x.$$

Also gilt  $\lim c^n = \infty$  für  $c > 1$ .

**2. Fall ( $0 < |c| < 1$ ):** Sei  $d := \frac{1}{|c|}$ . Wegen  $0 < |c| < 1$  gilt  $d > 1$  und nach dem ersten Fall gilt  $\lim d^n = \infty$ . Aus Satz 5.27 folgt somit  $\frac{1}{d^n} = |c|^n = |c^n| \rightarrow 0$  und daraus folgt  $\lim c^n = 0$  für  $c \in \mathbb{R}$  mit  $0 < |c| < 1$ .

**3. Fall ( $c = 0$  oder  $c = 1$ ):** In diesen Fällen ist die Folge konstant, d. h. alle Folgenglieder  $c^n$  haben denselben Wert, nämlich entweder  $c = 0$  oder  $c = 1$ . Konstante Folgen konvergieren immer gegen den konstanten Wert der Folgenglieder und somit gilt  $\lim c^n = c$  für  $c = 0$  oder  $c = 1$ .

**4. Fall ( $c \leq -1$ ):** In diesem Fall ist  $c^n \leq -1$  für alle ungeraden  $n \in \mathbb{N}$  und  $c^n \geq 1$  für alle geraden  $n \in \mathbb{N}$ . Der Abstand von zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern ist also immer mindestens 2. Daher konvergiert die Folge nicht. Die Folge divergiert auch nicht bestimmt, da das Vorzeichen immer wieder wechselt.

**Beispiel 5.40.** Wir betrachten für ein festes  $c \in \mathbb{R}$  die Folge  $(\frac{c^n}{n!})_{n \in \mathbb{N}}$  mit dem  $n$ -ten Folgenglied  $c^n/n!$ . Wir zeigen  $\lim \frac{c^n}{n!} = 0$ .

Um das zu zeigen wählen wir eine natürliche Zahl  $m \geq |c|$ . Für alle  $n > m$  gilt dann

$$\left| \frac{c^n}{n!} - 0 \right| = \frac{|c|^n}{n!} = \frac{|c|^m}{m!} \cdot \frac{|c|}{m+1} \cdot \frac{|c|}{m+2} \cdot \dots \cdot \frac{|c|}{n} \leq \frac{|c|^m}{m!} \cdot \frac{|c|}{n}, \quad (5.5)$$

da für  $m' = m + 1, \dots, n - 1$  die Ungleichung  $|c|/m' < 1$  gilt.

Sei nun  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wir wählen nun  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass sowohl  $n_0 > m$  als auch

$$n_0 > \frac{|c|^m}{m!} \cdot \frac{|c|}{\varepsilon} \quad (5.6)$$

gilt. Dann gilt für alle  $n \geq n_0$

$$\left| \frac{c^n}{n!} - 0 \right| \stackrel{(5.5)}{\leq} \frac{|c|^m}{m!} \cdot \frac{|c|}{n} \leq \frac{|c|^m}{m!} \cdot \frac{|c|}{n_0} \stackrel{(5.6)}{<} \varepsilon.$$

Damit konvergiert die Folge  $\left(\frac{c^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen 0, d. h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0$  für jedes  $c \in \mathbb{R}$ .

Wir betrachten noch zwei wichtige Beispiele für sogenannte *Reihen*.

**Definition 5.41** (Reihen). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen. Die  $n$ -te Partialsumme  $s_n$  der Folge ist Summe der ersten  $n$  Folgenglieder, d. h.

$$s_n := \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \cdots + a_n.$$

Die Folge der Partialsummen  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt Reihe mit den Gliedern  $a_n$ . Die Reihe  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bezeichnet man oft mit der unendlichen Summe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Eine Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert gegen eine reelle Zahl  $s$ , falls die Folge der Partialsummen  $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$  gegen  $s$  konvergiert, d. h.  $\lim s_n = s$ . Wir schreiben dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Gilt  $s_n \rightarrow \infty$  oder  $s_n \rightarrow -\infty$ , so schreiben wir  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$  bzw.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$ .

Wir können die Indizes einer Reihe auch bei einer anderen Zahl als 1 anfangen lassen. Es ist zum Beispiel klar, was mit der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  gemeint ist.

Zum Abschluss betrachten wir die *geometrische* und die *harmonische Reihe*.

**Satz 5.42** (Geometrische Reihe). Die geometrische Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  konvergiert für reelle Zahlen  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q| < 1$  gegen  $\frac{1}{1-q}$ .

BEWEIS. Dazu erinnern wir uns an die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

die uns einen geschlossenen Ausdruck für die Partialsummen  $s_n = \sum_{k=0}^n q^k$  liefert. Wir wissen bereits, dass für  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q| < 1$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

Damit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

□

**Satz 5.43** (Harmonische Reihe). Die harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergiert.

BEWEIS. Dazu fassen wir die Glieder der Reihe  $a_n = 1/n$  wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= \frac{1}{2}, \\ a_3 + a_4 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ a_5 + \cdots + a_8 &= \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Allgemein gilt für alle  $i \in \mathbb{N}$ :

$$a_{2^{i-1}+1} + \cdots + a_{2^i} > 2^{i-1} \cdot \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}$$

Damit gilt für die  $2^n$ -te Partialsumme:

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) > n \cdot \frac{1}{2}$$

Also gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ . □

Wir bemerken noch, dass die harmonische Reihe „gerade so“ divergiert. Man kann zeigen, dass die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  für alle  $\alpha > 1$  konvergiert. Wir beschließen diesen Abschnitt mit der folgenden Bemerkung.

**Bemerkung 5.44.** Einige in der Mathematik häufig auftretende reelle Zahlen haben eine einfache Reihendarstellung. So ist

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

oder auch

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

## §5.8 KONSTRUKTION DER REELLEN ZAHLEN

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wollen wir kurz vorstellen, wie man alternativ zur axiomatischen Einführung der reellen Zahlen in Abschnitt 5.1, diese auch aus den rationalen Zahlen mittels einer geeigneten Äquivalenzrelation konstruieren kann. Ein Vorteil von diesem Ansatz liegt darin, dass dadurch die gesamte Mathematik auf die Axiome der Mengenlehre zurückgeführt werden kann und man für die reellen Zahlen keine zusätzlichen Axiome braucht.

Die zentrale Idee bei der Konstruktion der reellen Zahlen ist die *Vervollständigung*, sodass z. B. alle Cauchy-Folgen konvergieren (siehe Satz 5.35). Dies erreicht man dadurch, dass man  $\mathbb{R}$  als Menge aller rationalen Cauchy-Folgen betrachtet, wobei Folgen mit dem „gleichen Grenzwert“ als äquivalent angesehen werden.

Sei also  $X$  die Menge aller rationalen Cauchy-Folgen, d. h. eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist in  $X$ , falls

$$a_n \in \mathbb{Q} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und für jedes  $\varepsilon > 0$  (aus  $\mathbb{Q}$ ) gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq n_0.$$

Nun definieren wir eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $X$ , wobei zwei rationale Cauchy-Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  äquivalent sind, falls die Folge  $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen Null konvergiert. Die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  entspricht dann der Faktormenge  $X/\sim$ .

Wir identifizieren somit jede reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$  mit der Äquivalenzklasse rationaler Cauchy-Folgen, die gegen  $x$  „konvergieren“. Durch diese Konstruktion ist jede reelle Zahl also der Grenzwert einer rationalen Folge.

Die Rechenoperationen  $+$  und  $\cdot$  aus  $\mathbb{Q}$  lassen sich leicht auf die Äquivalenzklassen in  $X/\sim$  mittels Repräsentanten übertragen. Wir definieren die Addition in  $\mathbb{R} = X/\sim$  durch

$$[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] + [(b_n)_{n \in \mathbb{N}}] := [(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}]$$

und genauso die Multiplikation

$$[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \cdot [(b_n)_{n \in \mathbb{N}}] := [(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}].$$

Man kann zeigen, dass diese Definitionen wohldefiniert sind (unabhängig von den gewählten Repräsentanten der Äquivalenzklassen). Des Weiteren kann man durch diese Definitionen die Körpereigenschaften von  $\mathbb{Q}$  auf  $\mathbb{R} = X/\sim$  übertragen und dort überprüfen.

Genauso kann man die Ordnung  $<$  von  $\mathbb{Q}$  auf die Äquivalenzklassen in  $X/\sim$  durch

$$[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] < [(b_n)_{n \in \mathbb{N}}] \quad :\iff \quad a_n < b_n \quad \text{für alle bis auf endlich viele } n \in \mathbb{N}$$

übertragen und erhält so, dass  $\mathbb{R} = X/\sim$  (genau wie  $\mathbb{Q}$ ) ein angeordneter Körper ist.

Im Unterschied zu  $\mathbb{Q}$  wollen wir aber auch, dass  $\mathbb{R}$  vollständig ist, was die Motivation für die Konstruktion von  $\mathbb{R}$  ist. Diese Konstruktion liefert per Definition eine Vollständigkeit in dem Sinne, dass jede rationale Cauchy-Folge konvergiert, nämlich gegen das Element in  $\mathbb{R} = X/\sim$  welches der Äquivalenzklasse entspricht in der die rationale Cauchy-Folge liegt. Wir wollen aber auch, dass alle reellen Cauchy-Folgen konvergieren. Da aber die reellen Folgeglieder über rationale Cauchy-Folgen beliebig gut approximiert werden können, kann tatsächlich gezeigt werden, dass  $\mathbb{R}$  konstruiert als Faktormenge  $X/\sim$  ein vollständiger Körper ist.

Die hier skizzierte Konstruktion geht auf Cantor zurück und für eine umfassendere Diskussion verweisen wir z. B. auf [6].

## Stetige Funktionen

### §6.1 FUNKTIONSGRENZWERTE

Eine *reelle Funktion* ist eine Funktion von einer Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{R}$  in die reellen Zahlen. Den *Definitionsbereich* einer reellen Funktion  $f$  bezeichnen wir mit  $D(f)$ . Im Zusammenhang mit reellen Funktionen  $f$  betrachtet man Grenzwerte des Typs

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x),$$

sogenannte *Funktionsgrenzwerte*, wobei  $\hat{x}$  nicht unbedingt im Definitionsbereich  $D(f)$  liegen muss.

Wir beginnen mit den folgenden Definitionen.

**Definition 6.1.** Sei  $X \subset \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}$ . Der Punkt  $x$  heißt Berührungspunkt von  $X$ , wenn es mindestens eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in X$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gibt, die gegen  $x$  konvergiert.

Falls es eine solche Folge  $x_n \rightarrow x$  gibt, wobei zusätzlich alle Folgenglieder  $x_n \neq \hat{x}$  erfüllen, dann ist der Berührungspunkt  $x$  ein Häufungspunkt von  $X$ .

Trivialerweise ist jeder Punkt  $x \in X$  ein Berührungspunkt von  $X$ , da die konstante Folge  $(x)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$  konvergiert. Auf der anderen Seite ist nicht unbedingt jeder Berührungspunkt ein Häufungspunkt. Betrachten wir dafür z. B. die Menge  $X = (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty)$ . Es gibt keine Folge in  $X \setminus \{0\}$  die gegen 0 konvergiert und somit ist 0 kein Häufungspunkt von  $X$ .

**Beispiel 6.2.** Die folgenden Beispiele kann man sich leicht überlegen.

- (a) Für  $a < b$  sind die Randpunkte  $a$  und  $b$  eines Intervalls  $I$  sowohl Berühr-, als auch Häufungspunkte. Dies ist unabhängig davon, ob  $I$  offen, halboffen oder abgeschlossen ist. Genauso ist jeder Punkt aus  $I$  sowohl Berühr-, als auch Häufungspunkt von  $I$ .
- (b) Die Menge  $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$  hat nur 0 als Häufungspunkt und  $X \cup \{0\}$  ist die Menge der Berührungspunkte von  $X$ .
- (c) Da die rationalen Zahlen nach Satz 5.13 dicht in  $\mathbb{R}$  sind, kann man zeigen, dass jede reelle Zahl  $\xi \in \mathbb{R}$  ein Häufungspunkt von  $\mathbb{Q}$  ist.

**Definition 6.3.** Sei  $f$  eine reelle Funktion mit Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $\hat{x} \in \mathbb{R}$  ein Berührungspunkt von  $D$ . Für  $a \in \mathbb{R}$  sagen wir, dass  $f$  an der Stelle  $\hat{x}$  den Funktionsgrenzwert  $a$  hat, und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = a \quad \text{bzw.} \quad f(x) \rightarrow a \quad \text{für} \quad x \rightarrow \hat{x},$$

falls für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \rightarrow \hat{x}$  und  $x_n \in D$  für  $n \in \mathbb{N}$  die Folge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$  konvergiert, wenn also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

für alle solche Folgen gilt.

In dieser Definition wird nicht vorausgesetzt, dass  $\hat{x}$  im Definitionsbereich von  $f$  liegt. Für die Berührungspunkte  $\hat{x}$ , die in  $D(f)$  liegen und für die der Funktionsgrenzwert an der Stelle  $\hat{x}$  existiert, muss  $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = f(\hat{x})$  gelten, da die konstante Folge  $(\hat{x})_{n \in \mathbb{N}}$  trivialerweise gegen  $\hat{x}$  konvergiert.

Für den Grenzwert  $a$  lassen wir auch die uneigentlichen Grenzwerte  $-\infty$  und  $\infty$  zu und definieren auf naheliegender Weise, wann  $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = \infty$  oder  $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = -\infty$  gilt. Schließlich lassen wir auch für  $\hat{x}$  die uneigentlichen Grenzwerte  $\infty$  und  $-\infty$  zu und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

bedeutet also, dass es mindestens eine Folge  $(x_n)$  von Elementen von  $D(f)$  gibt, für die  $x_n \rightarrow \infty$  gilt, und dass für alle solchen Folgen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

gilt. Wieder sind dabei  $a = -\infty$  und  $a = \infty$  zugelassen. Analog definieren wir, wann

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$

gilt.

**Beispiel 6.4.** (a) Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion mit  $f(x) = x^2$ . Dann ist  $D(f) = \mathbb{R}$  und jedes  $\hat{x} \in \mathbb{R}$  ist ein Berührungspunkt. Für jedes  $\hat{x} \in \mathbb{R}$  gilt nun  $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = \hat{x}^2$ . Sei nämlich  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt wegen Satz 5.36

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = \hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{x}^2.$$

Auf ähnliche Weise sieht man  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

(b) Sei  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Wir prüfen die Existenz des Funktionsgrenzwertes für  $\hat{x} = 0$ . Für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Elementen des offenen Intervalls  $(0, \infty)$  mit  $x_n \rightarrow 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Auf der anderen Seite liegt 0 im Definitionsbereich von  $f$  und  $f(0) = 0$ . D. h. der Funktionsgrenzwert an der Stelle 0 existiert nicht.

(c) Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Wir untersuchen, ob der Funktionsgrenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert. Dazu betrachten wir die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ , die  $x_n \rightarrow 0$  erfüllt.

Für alle geraden  $n$  ist  $x_n > 0$  und damit ist  $f(x_n) = 1$ . Für alle ungeraden  $n$  ist  $x_n < 0$  und damit ist  $f(x_n) = -1$ . Es folgt, dass der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  nicht existiert. Damit existiert auch der Funktionsgrenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  nicht.

(d) Wir betrachten noch die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Diese Funktion ist für  $x = 0$  nicht definiert und der Funktionsgrenzwert an der Stelle 0 hängt vom Definitionsbereich ab, den wir für die Funktion  $f$  zu Grunde legen.

- Sei zunächst  $D(f) = (0, \infty)$ . Für alle  $\hat{x} \in (0, \infty)$  gilt  $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = \frac{1}{\hat{x}}$ . Außerdem ist  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ .
- Betrachten wir nun die Funktion  $f$  mit dem Definitionsbereich  $(-\infty, 0)$ , so ist für alle  $\hat{x} \in (-\infty, 0)$  wieder  $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = \frac{1}{\hat{x}}$ . Außerdem gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ .
- Betrachten wir die Funktion auf dem Definitionsbereich  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , so existiert der Funktionsgrenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  nicht.

## §6.2 STETIGKEIT

**Definition 6.5.** Es sei  $f$  eine reelle Funktion und  $\hat{x} \in D(f)$ . Die Funktion  $f$  heißt stetig an der Stelle  $\hat{x}$ , falls

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = f(\hat{x}),$$

d. h. für alle Folgen  $x_n \rightarrow \hat{x}$  mit Folgengliedern in  $D(f)$  gilt,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\hat{x})$ .

Die Funktion  $f$  heißt stetig auf einer Menge  $X \subseteq D(f)$ , falls  $f$  an jeder Stelle  $\hat{x} \in X$  stetig ist. Falls eine reelle Funktion auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig ist, so nennen wir die Funktion stetig.

Ist eine Funktion  $f$  nicht stetig bei  $\hat{x} \in D(f)$ , so ist  $\hat{x}$  eine Unstetigkeitsstelle von  $f$ .

**Beispiel 6.6.** (i) Sei  $c \in \mathbb{R}$ . Dann ist die konstante Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto c$  auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig, denn für jedes  $\hat{x} \in \mathbb{R}$  und jede Folge  $x_n \rightarrow \hat{x}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c = c = f(\hat{x}).$$

(ii) Die identische Funktion  $\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto x$  ist an jeder Stelle  $\hat{x} \in \mathbb{R}$  stetig. Sei nämlich  $\hat{x} \in \mathbb{R}$ , dann gilt für jede Folge  $x_n \rightarrow \hat{x}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{id}(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x} = \text{id}(\hat{x}).$$

- (iii) Nach Beispiel 6.4 (a) ist die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto x^2$  an jeder Stelle  $\hat{x} \in \mathbb{R}$  stetig.
- (iv) Nach Beispiel 6.4 (d) ist die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  stetig.
- (v) Die Funktion  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

aus Beispiel 6.4 (b) ist an der Stelle  $\hat{x} = 0$  unstetig.

- (vi) Die Funktion  $f$  aus Beispiel 6.4 (c) ist ebenfalls an der Stelle  $\hat{x} = 0$  unstetig.

Anschaulich kann man sich die Stetigkeit einer Funktion wie folgt vorstellen: Der Graph einer reellen Funktion  $f$  ist die Menge

$$\{(x, f(x)) : x \in D(f)\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Ist  $f$  auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  definiert, so ist grob gesprochen die Funktion  $f$  auf  $I$  stetig, wenn man den Graphen von  $f$  auf dem Intervall  $I$  „ohne abzusetzen“ zeichnen kann. Die Graphen der Funktionen aus Beispiel 6.6 (i)–(iv) kann man auf jedem Intervall in ihrem Definitionsbereich ohne abzusetzen zeichnen, bei den Funktionen aus (v) und (vi) geht das nicht, da die Graphen jeweils bei  $\hat{x} = 0$  Sprünge aufweisen.

Für zwei reelle Funktionen  $f$  und  $g$  definiert man  $f + g$  punktweise als die Funktion mit dem Definitionsbereich  $D(f) \cap D(g)$  durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

für alle  $x \in D(f) \cap D(g)$ . Analog definiert man  $f - g$ ,  $f \cdot g$  und  $\frac{f}{g}$ . Im Falle von  $\frac{f}{g}$  muss man allerdings noch diejenigen  $x \in D(f) \cap D(g)$  aus dem Definitionsbereich von  $\frac{f}{g}$  ausschließen, für die  $g(x) = 0$  gilt. Der Definitionsbereich von  $\frac{f}{g}$  ist also die Menge

$$(D(f) \cap D(g)) \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}.$$

Der folgende Satz zeigt, dass sich Stetigkeit unter diesen Rechenoperationen erhält.

**Satz 6.7.** *Seien  $f$  und  $g$  reelle Funktionen, die an der Stelle  $\hat{x} \in D(f) \cap D(g)$  stetig sind. Dann sind auch die Funktionen  $f + g$ ,  $f - g$  und  $f \cdot g$  bei  $\hat{x}$  stetig. Ist  $g(\hat{x}) \neq 0$ , so ist auch  $\frac{f}{g}$  an der Stelle  $\hat{x}$  stetig.*

**BEWEIS.** Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $D(f) \cap D(g)$  mit  $x_n \rightarrow \hat{x}$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  und  $g$  bei  $\hat{x}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\hat{x}) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(\hat{x}).$$

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 5.36) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = f(\hat{x}) + g(\hat{x}) = (f + g)(\hat{x}).\end{aligned}$$

Damit ist  $f + g$  an der Stelle  $\hat{x}$  stetig. Analog zeigt man die übrigen Behauptungen, wobei man bei  $\frac{f}{g}$  noch den Fall  $g(\hat{x}) = 0$  ausschließen muss.  $\square$

Wir erinnern uns daran, dass ein Polynom über  $\mathbb{R}$  ein Ausdruck der Form

$$a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$$

ist, wobei die  $a_i$  reelle Zahlen sind und  $X$  eine Unbekannte ist. Die zu einem reellen Polynom  $a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$  gehörende Polynomfunktion ist die Funktion

$$p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \longmapsto a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

Im Falle reeller Polynome können wir ein Polynom als formalen Ausdruck mit seiner Polynomfunktion identifizieren.

Eine *rationale Funktion*  $r$  ist ein Quotient

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

zweier reeller Polynomfunktionen  $p$  und  $q$ , wobei der Definitionsbereich von  $r$  die Menge

$$D(r) = \{x \in \mathbb{R}: q(x) \neq 0\}.$$

ist.

Aus Satz 6.7 und aus Beispiel 6.6 ergibt sich sofort das folgende Korollar

**Korollar 6.8.** (i) Jede reelle Polynomfunktion  $p$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig.

(ii) Jede rationale Funktion  $r = p/q$  ist auf ihrem Definitionsbereich  $D(r)$  stetig.

Wir erinnern an die Komposition zweier Funktionen. Sind  $A, B, C$  und  $D$  Mengen und  $f: A \longrightarrow B$  und  $g: C \longrightarrow D$  Funktionen mit  $f(A) \subseteq C$ , so ist die Komposition  $g \circ f: A \longrightarrow D$  die Abbildung, die jedes  $a \in A$  auf  $(g \circ f)(a) = g(f(a))$  abbildet.

Seien zum Beispiel  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  und  $g: [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = x^2 + 1$  und  $g(x) = x^8$ . Dann ist

$$(g \circ f)(x) = (x^2 + 1)^8.$$

Man nennt  $g \circ f$  auch eine *zusammengesetzte Funktion*. Dabei bezeichnet man  $f$  als die *innere Funktion* und  $g$  als die *äußere Funktion*. Man kann leicht einsehen, dass die Komposition stetiger Funktionen eine stetige Funktion ergibt.

**Satz 6.9.** Seien  $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$  und  $g: Y \longrightarrow \mathbb{R}$  reelle Funktionen mit  $f(X) \subseteq Y$ . Die Funktion  $f$  sei an der Stelle  $\hat{x} \in X$  stetig und die Funktion  $g$  sei an der Stelle  $f(\hat{x})$  stetig. Dann ist  $g \circ f$  an der Stelle  $\hat{x}$  stetig.

BEWEIS. Sei  $(x_n)_{n \rightarrow \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge mit  $x_n \rightarrow \hat{x}$ . Wir definieren durch  $y_n := f(x_n)$  die Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Da  $f$  an der Stelle  $\hat{x}$  stetig ist, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\hat{x})$$

und da  $g$  an der Stelle  $f(\hat{x})$  stetig ist, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(f(\hat{x})) = (g \circ f)(\hat{x}).$$

□

### §6.3 $\varepsilon$ - $\delta$ -KRITERIUM DER STETIGKEIT

Wir diskutieren noch eine weitere, äquivalente Definition der Stetigkeit, das sogenannte  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium.

**Satz 6.10.** *Sei  $f$  eine reelle Funktion und sei  $\hat{x} \in D(f)$ . Dann ist  $f$  genau dann an der Stelle  $\hat{x}$  stetig, wenn folgendes gilt:*

*Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , sodass für all  $x \in D(f)$  mit  $|x - \hat{x}| < \delta$  die Ungleichung  $|f(\hat{x}) - f(x)| < \varepsilon$  gilt.*

BEWEIS. Sei  $f$  eine reelle Funktion mit Definitionsbereich  $D$  und  $\hat{x} \in D$ . Wir beweisen beide Implikationen durch Widerspruch und beginnen mit der Hinrichtung.

Wir nehmen also an, dass für ein  $\varepsilon > 0$  kein  $\delta > 0$  gibt, sodass für alle  $x \in D$  mit  $|x - \hat{x}| < \delta$  die Ungleichung  $|f(x) - f(\hat{x})| < \varepsilon$  gilt. Setzt man  $\delta = 1/n$  für  $n \in \mathbb{N}$  so erhält man für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in D$ , welches die Ungleichungen

$$|x_n - \hat{x}| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(\hat{x})| \geq \varepsilon$$

erfüllt. Wegen der linken Ungleichung konvergiert die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\hat{x}$ , während die rechte Ungleichung zeigt, dass der Abstand zwischen  $f(x_n)$  und  $f(\hat{x})$  niemals kleiner  $\varepsilon$  ist. Somit ist  $f$  an der Stelle  $\hat{x}$  unstetig, im Widerspruch zur Annahme.

Für die Rückrichtung nehmen wir nun umgekehrt an, dass  $f$  nicht stetig bei  $\hat{x}$  ist. Dann gibt es eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $D$ , die gegen  $\hat{x}$  konvergiert, während  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  nicht gegen  $f(\hat{x})$  konvergiert. Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass für **kein**  $n_0 \in \mathbb{N}$  alle  $f(x_n)$  mit  $n \geq n_0$  die Ungleichung

$$|f(x_n) - f(\hat{x})| < \varepsilon$$

erfüllen. Anders ausgedrückt gibt es eine unendliche Menge von Indizes  $I \subseteq \mathbb{N}$ , sodass

$$|f(x_i) - f(\hat{x})| \geq \varepsilon \tag{6.1}$$

für alle  $i \in I$  gilt. Die Folge  $(x_i)_{i \in I}$  ist eine Teilfolge von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und konvergiert somit ebenfalls gegen  $\hat{x}$ . Somit gibt es für jedes  $\delta > 0$  ein  $i_0 \in I$ , sodass für alle  $i \in I$  mit  $i \geq i_0$  die Ungleichung  $|x_i - \hat{x}| < \delta$  gilt. Mit Blick auf (6.1) zeigt sich somit, dass das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium der Stetigkeit von  $f$  an der Stelle  $\hat{x}$  nicht erfüllt ist. □

Wir betrachten einige der bereits bekannten Beispiele und untersuchen die Stetigkeit mithilfe des  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium.

**Beispiel 6.11.** (a) Für  $c \in \mathbb{R}$  sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \rightarrow c$  die konstante Funktion. Wir zeigen die Stetigkeit von  $f$  mit dem  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium. Sei also  $\hat{x} \in \mathbb{R}$  beliebig und  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  die Gleichung

$$|f(x) - f(\hat{x})| = |c - c| = 0.$$

Also kann man in diesem Fall sogar  $\delta > 0$  beliebig wählen und für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - \hat{x}| < \delta$  gilt immer noch  $|f(x) - f(\hat{x})| = 0 < \varepsilon$ . Insbesondere erfüllt  $f$  bei  $\hat{x}$  das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium der Stetigkeit.

(b) Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \rightarrow x$  die Identität und  $\hat{x} \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Hier kann man  $\delta = \varepsilon$  setzen und dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - \hat{x}| < \delta$  die Ungleichung

$$|f(x) - f(\hat{x})| = |x - \hat{x}| < \delta = \varepsilon.$$

Also erfüllt  $f$  an der Stelle  $\hat{x}$  das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium der Stetigkeit.

(c) Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $x \mapsto x^2$ . Sei  $\hat{x} \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$ . Im Gegensatz zu den beiden Beispielen aus Teil (a) und (b) kann man hier kein konstantes  $\delta$  unabhängig von  $\hat{x}$  wählen.

Wir wollen  $\delta > 0$  (abhängig von  $\hat{x}$  und  $\varepsilon$ ) finden, sodass für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - \hat{x}| < \delta$  die Ungleichung  $|f(x) - f(\hat{x})| < \varepsilon$  gilt. Hierfür beobachtet man die folgende Identität

$$|f(x) - f(\hat{x})| = |x^2 - \hat{x}^2| = |(x - \hat{x}) \cdot (x + \hat{x})| = |x - \hat{x}| \cdot |x + \hat{x}|.$$

Da wir annehmen, dass  $x$  und  $\hat{x}$  Abstand kleiner  $\delta$  haben, gilt neben  $|x - \hat{x}| < \delta$  auch mithilfe der Dreiecksungleichung

$$|x + \hat{x}| < |x| + |\hat{x}| < (|\hat{x}| + \delta) + |\hat{x}| = 2 \cdot |\hat{x}| + \delta.$$

Wenn wir also  $\delta \leq |\hat{x}|$  wählen, dann erhalten wir

$$|f(x) - f(\hat{x})| = |x - \hat{x}| \cdot |x + \hat{x}| < \delta \cdot |x + \hat{x}| \leq \delta \cdot 3|\hat{x}|$$

und mit der Wahl  $\delta = \frac{\varepsilon}{3|\hat{x}|}$  erhalten wir die gewünschte Ungleichung

$$|f(x) - f(\hat{x})| < \varepsilon.$$

Allerdings müssen wir für diese Wahl von  $\delta$  auch  $\hat{x} \neq 0$  voraussetzen. Dieses Argument zeigt also nur die Stetigkeit von  $f$  mit dem  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium für  $\hat{x} \neq 0$ .

Für  $\hat{x} = 0$  gilt aber  $|f(x) - f(\hat{x})| = |x|^2$  und für vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  erhalten wir für  $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - \hat{x}| = |x| < \delta$  sofort

$$|f(x) - f(\hat{x})| = |x|^2 < \delta^2 \leq \delta \leq \varepsilon,$$

da für  $\delta \leq 1$  gilt  $\delta^2 \leq \delta$ .

(d) Wir betrachten nun noch die Funktion  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Setzt man  $\varepsilon = 1/2$  und  $\hat{x} = 0$ , so existiert für alle  $\delta > 0$  ein  $x \in [0, \infty)$  mit  $|x - \hat{x}| < \delta$  und  $x > 0$ , zum Beispiel  $x = \frac{\delta}{2}$ . Für jedes solche  $x$  gilt nun

$$|f(x) - f(\hat{x})| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon.$$

Damit erfüllt die Funktion  $f$  nicht das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium der Stetigkeit an der Stelle 0.

Wir halten fest, dass Stetigkeit es uns erlaubt, den Limesoperator  $\lim$  mit einer stetigen Funktion zu vertauschen. Genauer gesagt, gilt für jede konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deren Glieder und Grenzwert im Definitionsbereich liegen, die Identität

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

Auf diese Weise hilft die Stetigkeit der Funktion  $f$  bei der Bestimmung des Grenzwertes der Folge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ . Das ist nützlich, da viele aus der Schule bekannte reelle Funktionen stetig sind, wie zum Beispiel die Polynomfunktionen, trigonometrischen Funktionen  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ , die Logarithmusfunktion und die Exponentialfunktion.

Eine wichtige Eigenschaft von stetigen Funktionen ist, dass sie keine Werte im Bildbereich „überspringen“ und Intervalle auf Intervalle abbilden. Dies machen wir präzise mit dem *Zwischenwertsatz*.

**Satz 6.12** (Zwischenwertsatz). *Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $[a, b] \subseteq D$  mit  $f(a) < f(b)$ . Dann gibt es für jedes  $y \in [f(a), f(b)]$  ein  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) = y$ .*

BEWEIS. Angenommen für ein  $y \in [f(a), f(b)]$  gibt es kein solches Urbild  $x \in [a, b]$ . Wir definieren zwei Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rekursiv. Dafür setzen wir  $a_1 := a$  und  $b_1 := b$  und ausgehend von bereits definierten  $a_n$  und  $b_n$  betrachten wir  $c_n = (a_n + b_n)/2$  und definieren  $a_{n+1}$  und  $b_{n+1}$  in Abhängigkeit von  $f(c_n)$ .

Falls  $f(c_n) < y$  ist, dann setzen wir

$$a_{n+1} = c \quad \text{und} \quad b_{n+1} = b_n$$

und andernfalls gewissermaßen umgekehrt

$$a_{n+1} = a_n \quad \text{und} \quad b_{n+1} = c.$$

Der Punkt  $c_n$  liegt immer genau in der Mitte von  $a_n$  und  $b_n$  und deswegen gilt dann für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^{n-1}}.$$

Somit folgt  $\lim a_n = \lim b_n$  und sei  $x$  dieser Grenzwert. Wegen der Stetigkeit von  $f$  gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n).$$

Da aber  $f(a_n) < y$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist, muss  $f(x) = \lim f(a_n) \leq y$  gelten. Auf der anderen Seite folgt  $f(b_n) > y$  auch  $f(x) = \lim f(b_n) \geq y$  und somit ist  $f(x) = y$ .  $\square$

Der Satz gilt analog für stetige Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(a) > f(b)$ .



## Differentialrechnung

Wenn die Position eines sich bewegenden Objekts durch eine Funktion in Abhängigkeit von der Zeit gegeben ist, so ist es naheliegend zu fragen, welche Geschwindigkeit der Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt hat oder welche Beschleunigung er zu einem bestimmten Zeitraum erfährt. Allgemein kann man für Funktionen, die den Wert irgendeiner Größe in Abhängigkeit von der Zeit beschreiben, fragen, welche Änderungsrate diese Größe zu einem bestimmten Zeitpunkt hat. Rein geometrisch möchte man wissen, wie man für eine reelle Funktion  $f$  die Tangente an den Graphen der Funktion in einem Punkt  $(\hat{x}, f(\hat{x}))$  findet, falls man überhaupt sinnvoll definieren kann, was diese Tangente ist. Alle diese Fragen kann man mit Hilfe der *Differentialrechnung* beantworten, die auf Isaac Newton (1643–1727) und Leibniz (1646–1716) zurückgeht.

### §7.1 ABLEITUNG EINER FUNKTION

Wir betrachten eine reelle Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei wir meist voraussetzen, dass  $D$  ein nicht-triviales Intervall ist. Die Stelle  $\hat{x} \in D$  sei fest gewählt. Zu jedem  $x \in D$  betrachten wir den *Differenzenquotienten*

$$\frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}}.$$

Dieser Differenzenquotient gibt die Steigung der Geraden durch die Punkte  $(\hat{x}, f(\hat{x}))$  und  $(x, f(x))$  an oder auch das Verhältnis der Änderung von  $f$  zur Änderung von  $x$ .

Die Gerade durch die Punkte  $(\hat{x}, f(\hat{x}))$  und  $(x, f(x))$  nennt man eine *Sekante* im Punkt  $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ . Wenn wir jetzt den Punkt  $x$  immer näher an  $\hat{x}$  heran wandern lassen, so nähert sich die Sekante der Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(\hat{x}, f(\hat{x}))$  an.

Die Steigung der Sekante nähert sich dabei dem Wert

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}}$$

an, falls dieser Grenzwert überhaupt existiert. Diesen Grenzwert werden wir die *Ableitung von  $f$  an der Stelle  $\hat{x}$*  nennen und mit  $f'(\hat{x})$  bezeichnen. Bei der dieser Grenzwertbildung betrachten wir natürlich nur Folgen  $x_n \rightarrow \hat{x}$  mit  $x_n \neq \hat{x}$  und die Existenz mindestens einer solchen Folge ist garantiert, wenn  $\hat{x}$  ein Häufungspunkt in  $D$  ist.

**Definition 7.1.** Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion und  $\hat{x} \in D$  ein Häufungspunkt. Dann heißt  $f$  an der Stelle  $\hat{x}$  differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}}$$

existiert. Im Falle der Existenz bezeichnen wir diesen Grenzwert mit  $f'(\hat{x})$  und nennen ihn die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $\hat{x}$ .

Die Funktion  $f$  heißt differenzierbar auf einer Menge  $X \subseteq D$ , wenn  $f$  an jeder Stelle  $\hat{x} \in X$  differenzierbar ist.

Schließlich definieren wir zu  $f$  noch eine reelle Funktion  $f': D' \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$D' = \{\hat{x} \in D: f \text{ ist an der Stelle } \hat{x} \text{ differenzierbar}\},$$

die jedem  $x \in D'$  die Ableitung  $f'(x)$  von  $f$  an der Stelle  $x$  zuordnet. Diese Funktion  $f'$  nennen wir die Ableitung von  $f$ . Anstelle von  $f'(x)$  schreibt man auch  $\frac{df}{dx}$ .

**Beispiel 7.2.** (a) Wir betrachten zunächst für ein  $c \in \mathbb{R}$  die konstante Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto c$ . Für jedes  $\hat{x} \in \mathbb{R}$  gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}} = \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{c - c}{x - \hat{x}} = 0.$$

Damit ist  $f'(\hat{x}) = 0$ . Die Ableitung einer konstanten Funktion ist also die Funktion, die konstant 0 ist.

(b) Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto x$  die Identität und  $\hat{x} \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}} = \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{x - \hat{x}}{x - \hat{x}} = 1.$$

Somit ist  $f'(\hat{x}) = 1$ . Die Ableitung der identischen Funktion ist also die Funktion, die konstant den Wert 1 hat.

(c) Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $x \mapsto x^2$  und sei  $\hat{x} \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}} &= \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{x^2 - \hat{x}^2}{x - \hat{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{(x - \hat{x}) \cdot (x + \hat{x})}{x - \hat{x}} = \lim_{x \rightarrow \hat{x}} (x + \hat{x}) = 2\hat{x}. \end{aligned}$$

Für die Ableitung erhalten wir also  $f'(\hat{x}) = 2\hat{x}$  für alle  $\hat{x} \in \mathbb{R}$ .

(d) Wir betrachten noch die Betragsfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $x \mapsto |x|$ .

Für alle  $\hat{x} > 0$  ist

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}} = \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{|x| - |\hat{x}|}{x - \hat{x}} = \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{x - \hat{x}}{x - \hat{x}} = 1 \implies f'(\hat{x}) = 1.$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass für jede Folge  $x_n \rightarrow \hat{x}$  für  $\hat{x} > 0$  ein  $n_0$  existiert, sodass  $x_n > 0$  für alle  $n \geq n_0$ . Tatsächlich folgt dies aus der Definition konvergenter Folgen (setzte z. B.  $\varepsilon = \hat{x}/2$ ).

Für alle  $\hat{x} < 0$  gilt ebenso

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}} &= \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{|x| - |\hat{x}|}{x - \hat{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{(-x) - (-\hat{x})}{x - \hat{x}} = \lim_{x \rightarrow \hat{x}} -\frac{x - \hat{x}}{x - \hat{x}} = -1. \end{aligned}$$

und somit ist  $f'(\hat{x}) = -1$  für  $\hat{x} < 0$ .

Die Ableitung  $f'(0)$  existiert jedoch nicht. Sei nämlich  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert durch  $x_n = \frac{1}{n}$ , dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\frac{1}{n}| - |0|}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Sei nun  $x_n = -\frac{1}{n}$ . Dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|-\frac{1}{n}| - |0|}{-\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1.$$

Also existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$  nicht. Die Betragsfunktion ist an der Stelle 0 also nicht differenzierbar.

Die Betragsfunktion ist stetig, aber an der Stelle 0 nicht differenzierbar. Dieses Beispiel zeigt, dass die Umkehrung des folgenden Satz nicht gilt.

**Satz 7.3.** Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\hat{x} \in D$  ein Häufungspunkt. Ist  $f$  an der Stelle  $\hat{x}$  differenzierbar, so ist  $f$  an der Stelle  $\hat{x}$  auch stetig.

BEWEIS. Da  $f$  bei  $\hat{x}$  differenzierbar ist, existiert ein  $a \in \mathbb{R}$  mit

$$a = \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}}.$$

Es gilt mit Satz 5.36 (2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \hat{x}} (f(x) - f(\hat{x})) &= \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \left( \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}} \cdot (x - \hat{x}) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow \hat{x}} (x - \hat{x}) = a \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Damit folgt  $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = f(\hat{x})$  und das zeigt die Stetigkeit von  $f$  an der Stelle  $\hat{x}$ .  $\square$

**Bemerkung 7.4.** Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\hat{x} \in D$  ein Häufungspunkt.

(a) Ist  $f$  an der Stelle  $\hat{x}$  differenzierbar, so lautet die Gleichung für die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(\hat{x}, f(\hat{x}))$

$$y = f'(\hat{x})(x - \hat{x}) + f(\hat{x}).$$

(b) Wir definieren die *höheren Ableitungen* von  $f$  an der Stelle  $\hat{x}$ , falls diese existieren, rekursiv wie folgt.

- Die 0-te Ableitung von  $f$  an der Stelle  $\hat{x}$  ist einfach  $f(\hat{x})$  selbst.
- Wenn die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}$  für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  an der Stelle  $\hat{x} \in D(f^{(n)})$  bereits definiert ist und  $\hat{x}$  ein Häufungspunkt in  $D(f^{(n)})$  ist, so sei die  $(n + 1)$ -te Ableitung von  $f$  bei  $\hat{x}$  definiert durch

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(\hat{x})}{x - \hat{x}},$$

falls dieser existiert. Wir definieren die  $(n + 1)$ -te Ableitung durch

$$f^{(n+1)}(\hat{x}) = (f^{(n)})'(\hat{x}).$$

(c) Führen wir eine Variable  $h$  für  $x - \hat{x}$  ein, so ergibt sich

$$\frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}} = \frac{f(\hat{x} + h) - f(\hat{x})}{h}.$$

Für den Grenzwert des Differenzenquotienten können wir dann

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + h) - f(\hat{x})}{h}$$

schreiben, wobei wir nur solche Werte für  $h > 0$  zulassen, für die  $\hat{x} + h \in D(f)$  gilt. In diesem Ausdruck kommt die Variable  $x$  nicht mehr vor. Wenn wir die Notation vereinfachen und  $x$  anstelle von  $\hat{x}$  schreiben, so erhalten wir

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

## §7.2 ABLEITUNGSREGELN

Oftmals müssen wir zur Berechnung einer Ableitung nicht den Grenzwert des Differenzenquotienten direkt berechnen, sondern können verschiedene Ableitungsregeln einsetzen.

**Satz 7.5.** *Seien  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x \in D$  ein Häufungspunkt an dem beiden Funktionen differenzierbar sind. Dann sind auch die Funktionen  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $c \cdot f$  (für  $c \in \mathbb{R}$ ) und  $f \cdot g$  an der Stelle  $x$  differenzierbar. Ist  $g(x) \neq 0$ , so ist auch  $\frac{f}{g}$  an der Stelle  $x$  differenzierbar. Für die Ableitungen dieser Funktion gelten die folgenden Rechenregeln:*

$$(1) (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (\text{Summenregel})$$

$$(2) (f - g)'(x) = f'(x) - g'(x),$$

$$(3) (c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x),$$

$$(4) (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \quad (\text{Produktregel})$$

$$(5) \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}. \quad (\text{Quotientenregel})$$

**BEWEIS.** Die Summenregel folgt einfach aus der punktweisen Definition von  $f + g$  und den Rechenregeln konvergenter Folgen (Satz 5.36). Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x + h) - f(x)) + (g(x + h) - g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

Die Rechenregeln (2) und (3) folgen wie die Summenregel direkt.

Für die Produktregel beobachten wir zuerst

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right). \end{aligned}$$

Da Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert (siehe Satz 7.3), ist  $g$  an der Stelle  $x$  auch stetig, d. h.

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x).$$

Somit können wir die Rechenregeln für konvergente Folgen anwenden und erhalten die gesuchte Formel

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Für den Beweis der Quotientenregel nehmen wir zuerst an, dass  $f \equiv 1$  die konstante Einsfunktion ist. In diesem Fall wollen wir

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2} \quad (7.1)$$

nachweisen. Der allgemeine Fall ergibt sich dann einfach mithilfe der Produktregel.

Für den Beweis von (7.1) formen wir wieder den Differenzquotienten geeignet um.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1/g(x+h) - 1/g(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{g(x) - g(x+h)}{h}. \end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit von  $g$  an der Stelle  $x$  und den Rechenregeln konvergenter Folgen ergibt sich somit (7.1).  $\square$

**Satz 7.6.** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

- (i) die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $x \mapsto x^n$  ist  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt  $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ .
- (ii) die Funktion  $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}$  ist  $f$  auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  differenzierbar und es gilt  $g'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$ .

**BEWEIS.** Wir beweisen den ersten Teil des Satzes durch vollständige Induktion. Für den Induktionsanfang  $n = 1$  ist  $f(x) = x^1 = x$ . Wir haben bereits gesehen, dass in diesem Fall  $f'(x) = 1 = x^0$  gilt.

Sei nun  $n \in \mathbb{N}$ . Angenommen, es gilt  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ , dann ist

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot 1 = n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n = (n+1) \cdot x^n.$$

Der zweite Teil folgt nun aus dem ersten Teil mit der Quotientenregel

$$g'(x) = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{-n-1}.$$

□

**Korollar 7.7.** (i) Alle Polynomfunktionen sind auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar. Für  $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$  ist

$$p'(x) = \sum_{i=1}^n ia_i x^{i-1} = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}.$$

(ii) Rationale Funktionen  $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  für Polynomfunktionen  $p$  und  $q$  sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich  $D(r) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$  differenzierbar.

BEWEIS. Beide Teile dieses Satzes folgen sofort aus Satz 7.5 und Satz 7.6. Die Ableitung einer rationalen Funktion lässt sich leicht mithilfe der Quotientenregel berechnen. □

Wir erinnern an die Komposition zweier Funktionen. Sind  $A, B, C$  und  $D$  Mengen und  $f: A \rightarrow B$  und  $g: C \rightarrow D$  Funktionen mit  $f(A) \subseteq C$ , so ist die Komposition  $g \circ f: A \rightarrow D$  die Abbildung, die jedes  $a \in A$  auf  $(g \circ f)(a) = g(f(a))$  abbildet.

Seien zum Beispiel  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = x^2 + 1$  und  $g(x) = x^8$ . Dann ist

$$(g \circ f)(x) = (x^2 + 1)^8.$$

Man nennt  $g \circ f$  auch eine *zusammengesetzte Funktion*. Dabei bezeichnet man  $f$  als die *innere Funktion* und  $g$  als die *äußere Funktion*.

**Satz 7.8** (Kettenregel). Seien  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$  reelle Funktionen mit  $f(X) \subseteq Y$ . Die Funktion  $f$  sei an der Stelle  $x \in X$  differenzierbar und die Funktion  $g$  sei an der Stelle  $f(x)$  differenzierbar. Dann ist  $g \circ f$  an der Stelle  $x$  differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Für den Beweis der Kettenregel verweisen wir auf [2].

**Beispiel 7.9.** (a) Sei  $h(x) = (3x^3 - 5x + 2)^7$ . Wir können  $h$  als zusammengesetzte Funktion interpretieren. Sei  $g(y) = y^7$  und  $f(x) = 3x^3 - 5x + 2$ . Dann ist  $h(x) = (g \circ f)(x)$ . Nach der Kettenregel gilt

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 7 \cdot (3x^3 - 5x + 2)^6 \cdot (9x^2 - 5).$$

(b) Sei  $h(x) = \left(\frac{4x^3+1}{x+1}\right)^{13}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} h'(x) &= 13 \cdot \left(\frac{4x^3+1}{x+1}\right)^{12} \cdot \left(\frac{4x^3+1}{x+1}\right)' \\ &= 13 \cdot \left(\frac{4x^3+1}{x+1}\right)^{12} \cdot \frac{12x^2(x+1) - (4x^3+1)}{(x+1)^2} \\ &= 13 \cdot \left(\frac{4x^3+1}{x+1}\right)^{12} \cdot \frac{8x^3 + 12x^2 - 1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

**Definition 7.10.** Sei  $f$  eine reelle Funktion und sei  $X \subseteq D(f)$ .

- (i) Die Funktion  $f$  heißt *monoton wachsend auf  $X$* , falls für alle  $x_1, x_2 \in X$  mit  $x_1 < x_2$  gilt

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

- (ii) Die Funktion  $f$  heißt *streng monoton wachsend auf  $X$* , falls für alle  $x_1, x_2 \in X$  mit  $x_1 < x_2$  gilt

$$f(x_1) < f(x_2).$$

- (iii) Analog definiert man *monoton fallend* und *streng monoton fallend*.

- (iv) Die Funktion  $f$  heißt (streng) *monoton*, falls  $f$  (streng) *monoton wachsend* oder (streng) *monoton fallend* ist.

Man beachte, dass jede streng monotone Funktion  $f$  injektiv ist und somit gibt es für diese die Umkehrfunktion  $f^{-1}$ .

**Satz 7.11.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton auf  $I$ . Dann gilt

- (i) Das Bild  $f(I)$  von  $I$  unter  $f$  ist ein Intervall.  
(ii) Ist  $f$  streng monoton wachsend (fallend), so ist auch  $f^{-1}$  streng monoton wachsend (fallend).  
(iii)  $f^{-1}$  ist auf der Menge  $f(I)$  stetig.  
(iv) Ist  $f$  an der Stelle  $x$  differenzierbar und gilt  $f'(x) \neq 0$ , so ist  $f^{-1}$  an der Stelle  $y = f(x)$  differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

BEWEIS. Die erste Aussage ist eine direkte Folge des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen (siehe Satz 6.12) und die zweite Aussage folgt direkt aus der strengen Monotonie. Die Stetigkeit von  $f^{-1}$  folgt aus der Differenzierbarkeit, aber für den Beweis von Teil (iv) brauchen wir die Stetigkeit und so beginnen wir mit dem Nachweis von (iii).

Wir können annehmen, dass  $f$  streng monoton wachsend ist, da der Beweis für fallende Funktionen genauso funktioniert. Sei  $y \in f(I)$  beliebig. Wir zeigen mit dem  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium, dass  $f^{-1}$  in  $y$  stetig ist.

Sei  $x = f^{-1}(y)$  das Urbild von  $y$  unter  $f$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wir betrachten die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x \in I$ , d. h.

$$J := (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap I.$$

Da  $f$  Intervalle auf Intervalle abbildet, ist  $f(J)$  ein Teilintervall von  $f(I)$ , das  $y$  enthält. Insbesondere existiert ein  $\delta > 0$ , sodass  $(y - \delta, y + \delta) \subseteq f(J)$ . Somit ist  $f^{-1}(y') \in J$  für jedes  $y' \in (y - \delta, y + \delta)$ , womit

$$|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)| \leq \varepsilon$$

gezeigt und Teil (iii) bewiesen ist.

Für den Beweis von Teil (iv) sei  $y = f(x)$  gegeben und sei  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge in  $f(I) \setminus \{y\}$ , die gegen  $y$  konvergiert. Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegeben durch  $x_n = f^{-1}(y_n)$ . Wegen der bereits bewiesenen Stetigkeit von  $f^{-1}$  gilt  $\lim x_n = x$  und somit erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

□

Die Aussage (iv) ist die *Umkehrregel*. Wenn man die Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$  voraussetzt, dann ergibt sich die Umkehrregel elegant aus der Kettenregel

$$1 = \text{id}'(x) = (f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Wir können auch anschaulich erklären, wie es zu der Formel

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

für  $y_0 = f(x_0)$  kommt.

Sei  $x \in I \setminus \{x_0\}$ . Die Steigung der Sekante durch die Punkte  $(x_0, f(x_0))$  und  $(x, f(x))$  ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Man erhält den Graphen der Umkehrfunktion  $f^{-1}$  indem man den Graphen von  $f$  an der Geraden mit der Gleichung  $y = x$  spiegelt. Bei der Spiegelung geht der Punkt  $(x_0, f(x_0))$  in den Punkt  $(f(x_0), x_0) = (y_0, f^{-1}(y_0))$  über und der Punkt  $(x, f(x))$  in den Punkt  $(f(x), x)$ . Die Steigung der Sekante von  $f^{-1}$  durch die Punkte  $(f(x), x)$  und  $(f(x_0), x_0)$  ist

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Da  $f$  in  $x_0$  stetig ist, gilt  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  für  $x \rightarrow x_0$ . Damit ist  $(f^{-1})'(y_0)$  genau der Grenzwert von

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)},$$

wenn man  $x$  gegen  $x_0$  laufen lässt. Dieser Grenzwert ist aber genau  $\frac{1}{f'(x_0)}$ .

**Beispiel 7.12.** Sei  $I = (0, \infty)$  und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = x^2$ . Dann ist  $f$  auf  $I$  differenzierbar und streng monoton. Es gilt  $f'(x) = 2x$  und damit ist  $f'(x)$  auf dem Intervall  $I$  niemals 0. Die Umkehrfunktion  $f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  von  $f$  ist bekanntlich die Wurzelfunktion  $y \mapsto \sqrt{y}$ . Es seien  $x, y \in (0, \infty)$  mit  $x^2 = y$  beziehungsweise  $\sqrt{y} = x$ . Nach der Umkehrregel gilt für die Ableitung von  $f^{-1}$  an der Stelle  $y \in (0, \infty)$

$$(\sqrt{y})' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(x^2)'} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Schreiben wir die Wurzelfunktion nun als  $(0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  mit  $x \mapsto \sqrt{x}$ , so erhalten wir

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

In diesem Beispiel haben wir die Wurzelfunktion als bekannt vorausgesetzt. Da wir solche Funktionen formal noch gar nicht eingeführt hatten, holen wir dies nun nach.

### §7.3 POTENZ-, EXPONENTIAL- UND LOGARITHMUSFUNKTIONEN

**7.3.1. Potenzfunktionen.** Für eine natürliche Zahl  $n$  und eine reelle Zahl  $a$  ist  $a^n$  definiert als das Produkt von  $n$  Faktoren  $a$

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}.$$

Außerdem ist  $a^0 = 1$ . Schließlich definiert man

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Damit sind alle Potenzen  $a^z$  für ganzzahlige Exponenten  $z \in \mathbb{Z}$  erklärt. Es gelten folgende bekannte Rechenregeln, die man leicht mittels vollständiger Induktion nachweisen kann

- (1)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- (2)  $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
- (3)  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Als nächstes erklären wir Potenzen  $a^q$  für rationale Exponenten  $q \in \mathbb{Q}$ . Dazu müssen wir zunächst die Existenz  $n$ -ter Wurzeln aus positiven reellen Zahlen nachweisen, wobei  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl ist.

**Satz 7.13.** Sei  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a \geq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es genau eine reelle Zahl  $x \geq 0$ , die die Gleichung  $x^n = a$  löst.

BEWEIS. Sei  $I = [0, \infty)$ . Die Funktion  $f(x) = x^n$  ist stetig und streng monoton wachsend. Insbesondere ist  $f$  injektiv. Nach Satz 7.11 ist  $f(I)$  ein Intervall. Wegen  $f(0) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  gilt also  $f(I) = [0, \infty)$ . Also gibt es mindestens ein  $x \in I$  mit  $f(x) = a$ . Wegen der Injektivität von  $f$  gibt es auch nicht mehr als ein solches  $x$ .  $\square$

**Definition 7.14.** Die eindeutig bestimmte Zahl  $x$  aus Satz 7.13 heißt die  $n$ -te Wurzel von  $a$  und wird mit  $\sqrt[n]{a}$  bezeichnet.

Man beachte, dass  $\sqrt[n]{a}$  nur für  $a \geq 0$  definiert ist. Außerdem gilt für alle  $a \geq 0$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $\sqrt[n]{a} \geq 0$ .

**Definition 7.15.** Sei  $q = \frac{m}{n}$  eine rationale Zahl für  $m \in \mathbb{Z}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  setzen wir dann

$$a^q = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Damit sind Potenzen positiver reeller Zahlen mit rationalen Exponenten  $q$  erklärt. Mithilfe der Umkehrregel kann man nun, wie in Beispiel (7.1), die Ableitung von  $x^{1/n}$  berechnen und danach kann man dies mit der Kettenregel auf  $(x^{1/n})^m$  für alle rationalen Exponenten erweitern. Der folgende Satz verallgemeinert Satz 7.6 von ganzzahligen Exponenten zu rationalen Exponenten.

**Satz 7.16.** *Sei  $q \in \mathbb{Q}$  und  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $x \mapsto x^q$ . Dann ist  $f$  auf  $(0, \infty)$  differenzierbar und es gilt  $f'(x) = q \cdot x^{q-1}$ .*

**BEWEIS.** Für  $q = 0$  ist  $f$  die konstante Einsfunktion, deren Ableitung konstant  $0 = qx^{q-1}$  ist. Sei also  $q = m/n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $m \in \mathbb{Z}$  und  $m \neq 0$ . Mit  $g(x) = x^{1/n}$  und  $h(x) = x^m$  erhalten wir  $f(x) = (h \circ g)(x)$  und mit der Kettenregel gilt

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Die Ableitung von  $h$  ist uns aus Satz 7.6 bekannt und es gilt

$$h'(g(x)) = m \cdot (g(x))^{m-1} = m \cdot x^{\frac{m-1}{n}}.$$

Die Ableitung von  $g$  berechnen wir mit der Umkehrregel. Die Funktion  $x^n$  ist streng monoton wachsend und differenzierbar auf  $(0, \infty)$  und  $g$  ist die Umkehrfunktion von  $x^n$  auf  $(0, \infty)$ . Für  $y = z^n$  erhalten wir also  $g'(y) = \frac{1}{nz^{n-1}}$ . Setzen wir nun für  $y = x$  und  $z = x^{1/n}$ , dann gilt

$$g'(x) = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Für die Ableitung von  $f$  ergibt sich somit

$$f'(x) = m \cdot x^{\frac{m-1}{n}} \cdot \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-1}{n} - \frac{n-1}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n} - 1} = q \cdot x^{q-1}.$$

□

Man kann Definition 7.15 wie folgt auf Potenzen mit reellen Exponenten erweitern. Sei  $a > 0$  und  $r \in \mathbb{R}$ . Dann wählt man eine Folge  $(q_n)$  rationaler Zahlen, die gegen  $x$  konvergiert. Eine solche Folge existiert immer.

Sei nämlich

$$r = r_0.r_1r_2r_3\dots$$

die eindeutige Darstellung von  $r$  als unendlicher Dezimalbruch mit  $r_0 \in \mathbb{Z}$  und mit  $r_i \in \{0, \dots, 9\}$ , dann sei  $q_n$  die rationale Zahl mit der Dezimaldarstellung  $r_0.r_1\dots r_n$ . Wie man leicht sieht, konvergiert  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dann gegen  $r$ .

Nun definieren wir

$$a^r = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n}.$$

Dieser Grenzwert existiert für alle  $a > 0$  und alle  $r \in \mathbb{R}$ . Auch hängt der Grenzwert nicht von der Wahl der rationalen Folge  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ab. Alle Folgen rationaler Zahlen, die gegen  $r$  konvergieren, liefern denselben Grenzwert.

**Definition 7.17.** Für  $a, r \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  sei

$$a^r := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n},$$

wobei  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge rationaler Zahlen ist, die gegen  $r$  konvergiert. Für alle  $r > 0$  sei außerdem  $0^r := 0$ .

**Beispiel 7.18.** Wir wollen  $2^\pi$  berechnen. Es gilt  $\pi = 3.14159\dots$ . Die Kreiszahl  $\pi$  ist nicht rational. Wenn wir wie oben die rationale Folge  $(q_n)$  wählen, die gegen  $\pi$  konvergiert, so erhalten wir  $q_1 = 3.1$ ,  $q_2 = 3.14$ ,  $q_4 = 3.141$ ,  $q_5 = 3.1415$  und so weiter. Es gilt  $2^{q_1} = 8.57$ ,  $2^{q_2} = 8.815$ ,  $2^{q_3} = 8.82135$  und  $2^{q_4} = 8.82441$ . Die Folge  $(q_n)$  konvergiert gegen  $\pi$ . Die Folge  $(2^{q_n})$  konvergiert gegen  $2^\pi$ .

Im Folgenden lernen wir eine weitere Möglichkeit vor  $a^r$  für reelle Exponenten zu definieren. Dafür führen wir zuerst die Exponentialfunktion ein. Mithilfe dieser Definition lassen sich die Potenzgesetze und Satz 7.16 leicht für reelle Exponenten verallgemeinern.

**7.3.2. Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus.** In Kapitel 5.5 nach Korollar 5.33 hatten wir die Eulersche Zahl  $e$  als Grenzwert der Folge  $((1 + 1/n)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert. Allgemeiner definieren wir die Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n$ . Dafür zeigen wir zunächst, dass diese Grenzwerte für jedes  $x \in \mathbb{R}$  existieren.

**Satz 7.19.** Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die Folge  $((1 + x/n)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**BEWEIS.** Wir können ganz ähnlich vorgehen wie im Beweis von Korollar 5.33, wo wir den Fall  $x = 1$  behandelt haben. Sei also  $x \in \mathbb{R}$  beliebig. Wir zeigen, dass es ein  $n_0$  gibt, sodass die Folge  $((1 + x/n)^n)_{n > n_0}$  monoton wachsend und beschränkt ist. Tatsächlich gilt für  $n > n_0 \geq \lceil |x| \rceil$

$$\frac{(1 + \frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{x}{n})^n} = (1 + \frac{x}{n}) \left( \frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} \right)^{n+1} = (1 + \frac{x}{n}) \left( 1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)} \right)^{n+1}.$$

Da  $n > |x|$  ist, gilt  $-\frac{x}{(n+1)(n+x)} \geq -1$ . Somit können wir Bernoullis Ungleichung (siehe (5.3)) anwenden und wir erhalten

$$\frac{(1 + \frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{x}{n})^n} = (1 + \frac{x}{n}) \left( 1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)} \right)^{n+1} \stackrel{(5.3)}{\geq} (1 + \frac{x}{n}) \left( 1 - \frac{x}{n+x} \right) = \frac{n+x}{n} \cdot \frac{n}{n+x} = 1,$$

womit gezeigt ist, dass die Folge  $((1 + x/n)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ab  $n > |x|$  monoton wachsend ist.

Als nächstes zeigen wir, dass die Folge nach oben beschränkt ist. Dafür verwenden wir wieder den binomischen Lehrsatz und die Dreiecksungleichung und erhalten

$$\left| \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n \right| = \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \frac{x}{n} \right)^k \right| \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \frac{|x|}{n} \right)^k \leq \sum_{k=0}^n \frac{|x|^k}{k!}.$$

Aus Beispiel 5.40 wissen wir, dass  $(|x|^k/k!)_{k \in \mathbb{N}}$  gegen 0 konvergiert und so gibt es ein  $k_0$ , sodass  $|x|^k/k! \leq 1$  für alle  $k \geq k_0$ . Sei  $k_1 \geq k_0$  so gewählt, dass auch  $|x|/k \leq 1/2$  für alle  $k \geq k_1$  gilt. Dann erhalten wir für  $n \geq k_1$

$$\sum_{k=0}^n \frac{|x|^k}{k!} = \sum_{k=0}^{k_1-1} \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=k_1}^n \frac{|x|^k}{k!}.$$

Die erste Summe ist unabhängig von  $n$  und sei  $K \in \mathbb{R}$  definiert durch

$$K := \sum_{k=0}^{k_1-1} \frac{|x|^k}{k!}.$$

Für die zweite Summe können wir  $|x|^k/k! \leq 1$  und  $|x|/k \leq 1/2$  für alle  $k \geq k_1$  verwenden und erhalten die Abschätzung

$$\sum_{k=k_1}^n \frac{|x|^k}{k!} = \sum_{k=k_1}^n \left( \frac{|x|^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{|x|}{k+1} \cdots \frac{|x|}{n} \right) \leq \sum_{k=k_1}^n \left( \frac{1}{2} \right)^{k-k_1} = \sum_{i=0}^{n-k_1} \left( \frac{1}{2} \right)^i.$$

Mit Satz 5.42 folgt, dass wir diese geometrischen Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$  durch 2 abschätzen können und insgesamt sehen wir somit

$$\left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| \leq K + 2.$$

Die Folge  $\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  ist somit nach oben beschränkt und zusammen mit der bereits gezeigten Monotonie folgt aus Satz 5.32 die Konvergenz.  $\square$

Nachdem wir die Konvergenz gezeigt haben, können wir über diese Folgen die Exponentialfunktion definieren.

**Definition 7.20** (Exponentialfunktion). Die Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir für alle  $x \in \mathbb{R}$  durch

$$\exp(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Neben der obigen Definition der Exponentialfunktion wird in der Literatur diese Funktion oftmals durch

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{7.2}$$

definiert. Tatsächlich kann man mit dem binomischen Lehrsatz sehen, dass

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k}$$

sich für große  $n$  der  $n$ -ten Partialsumme aus (7.2)

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

immer weiter annähert, da  $\binom{n}{k}/n^k \rightarrow 1/k!$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt.

Eine der wichtigsten Eigenschaften der Exponentialfunktion ist die folgende *Funktionalgleichung*.

**Satz 7.21** (Funktionalgleichung). *Für alle reellen Zahlen  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt*

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

BEWEIS. Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  beliebig gewählt. Mithilfe der Rechenregeln für konvergente Folgen sehen wir

$$\begin{aligned} \exp(x) \cdot \exp(y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{xy}{n^2+n(x+y)}\right)^n \right]. \end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{xy}{n^2+n(x+y)}\right)^n = 1 \quad (7.3)$$

und mit einer weiteren Anwendung der Rechenregeln konvergenter Folgen erhalten wir dann die gesuchte Funktionalgleichung

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n = \exp(x + y).$$

Für den Beweis von (7.3) unterscheiden wir zwei Fälle.

Falls  $xy \leq 0$  gilt, dann erhalten wir mit Bernoullis Ungleichung für ein hinreichend grosses  $n$  (sodass  $n^2 + n(x+y) \geq 0$  und  $\frac{xy}{n^2+n(x+y)} \geq -1$  ist)

$$1 \geq \left(1 + \frac{xy}{n^2+n(x+y)}\right)^n \stackrel{(5.3)}{\geq} 1 + n \frac{xy}{n^2+n(x+y)} = 1 + \frac{xy}{n+(x+y)}.$$

Da  $x$  und  $y$  fest gewählt sind, ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{xy}{n+(x+y)} = 0$  und (7.3) folgt durch

$$1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{xy}{n^2+n(x+y)}\right)^n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{xy}{n+(x+y)}\right) = 1.$$

Für  $xy > 0$  verwenden wir die Ungleichung  $1 + z \leq \frac{1}{1-z}$  für  $z \neq 1$ , die aus der binomischen Formel  $(1+z)(1-z) = 1 - z^2 < 1$  folgt. Mit einer weiteren Anwendung der Bernoulli-Ungleichung für hinreichend großes  $n$  (sodass die Voraussetzung  $\frac{xy}{n^2+n(x+y)} \leq 1$  gilt) sehen wir

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{xy}{n^2+n(x+y)}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{xy}{n^2+n(x+y)}\right)^n} \stackrel{(5.3)}{\leq} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{xy}{n+(x+y)}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

und (7.3) folgt.  $\square$

Mit der Funktionalgleichung können wir viele weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion herleiten. In Kapitel 7.3.1 haben wir Potenzen  $a^r$  eingeführt und in (5.4) hatten wir die Eulersche Zahl als

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp(1)$$

definiert. Mit der Funktionalgleichung, den Potenzgesetzen für ganzzahlige Exponenten und einer einfachen Induktion über  $n \in \mathbb{N}$  erhalten wir

$$\exp(n) = \exp(n-1) \exp(1) = e^{n-1} e = e^{n-1} e^1 = e^n.$$

Weiterhin gilt  $\exp(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 0/n)^n = 1$  und eine weitere Anwendung der Funktionalgleichung zeigt

$$1 = \exp(0) = \exp(n - n) = \exp(n) \exp(-n) = e^n \cdot \exp(-n) \implies \exp(-n) = \frac{1}{e^n} = e^{-n}.$$

Die wichtigsten Eigenschaften der Exponentialfunktion fassen wir in folgendem Satz zusammen.

**Satz 7.22.** *Die Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt folgende Eigenschaften*

- (i)  $\exp(x) > 1$  für alle  $x > 0$  und  $\exp(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$  für alle  $x \in (-1, 1)$ ,
- (iii)  $\exp(x)$  ist streng monoton wachsend,
- (iv)  $\exp(x)$  ist stetig auf ganz  $\mathbb{R}$ ,
- (v)  $\exp(x)$  hat Bildbereich  $(0, \infty)$  und
- (vi)  $\exp(x)$  ist differenzierbar auf ganz  $\mathbb{R}$  und hat die Ableitung  $\exp'(x) = \exp(x)$ .

BEWEIS. Für  $x \geq 0$  folgt direkt aus der Definition von  $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n$  auch  $\exp(x) \geq 1$ . Aus der Funktionalgleichung folgt dann auch  $\exp(-x) = 1/\exp(x) > 0$ , was (i) beweist.

Die untere Schranke von Teil (ii) folgt wieder direkt aus der Bernoulli-Ungleichung

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x) = 1 + x.$$

Für die obere Schranke verwenden wir erst  $(1 + z) \leq \frac{1}{1-z}$ , gefolgt von einer weiteren Anwendung der Bernoulli-Ungleichung

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{1 - x},$$

womit Teil (ii) bewiesen ist.

Für die Monotonie seien  $x < y$  beliebige reelle Zahlen. Wegen der Funktionalgleichung gilt

$$\exp(y) = \exp(x + y - x) = \exp(x) \cdot \exp(y - x)$$

und da  $y - x > 0$  ist, folgt aus Teil (i) auch  $\exp(y) > \exp(x)$  und somit die strenge Monotonie von Teil (iii).

Die Stetigkeit aus Teil (iv) prüfen wir zuerst im Punkt  $x = 0$ . Sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge mit  $z_n \rightarrow 0$ . Für hinreichend großes  $n_0$  liegen also alle Folgenglieder  $x_n$  in  $(-1, 1)$  für  $n \geq n_0$ . Somit erhalten wir aus Teil (ii) über

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + z_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(z_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - z_n} = 1$$

auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(z_n) = 1 = \exp(0)$ , was die Stetigkeit an der Stelle 0 zeigt.

Für beliebiges  $x \in \mathbb{R}$  folgt die Stetigkeit dann mit der Funktionalgleichung, da für alle Folgen  $x_n \rightarrow x$  gilt  $x_n - x \rightarrow 0$  und somit gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x + x_n - x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x) \exp(x_n - x) \\ &= \exp(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n - x) = \exp(x) \exp(0) = \exp(x). \end{aligned}$$

Teil (v) folgt aus Teil (i) mit der Stetigkeit dann aus dem Zwischenwertsatz und der Tatsache, dass  $\exp(n) = e^n \rightarrow \infty$  und somit auch  $\exp(-n) = e^{-n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Teil (vi) überprüfen wir wieder zuerst an der Stelle  $x = 0$  und mithilfe der Abschätzungen aus Teil (ii) erhalten wir

$$1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h - 1}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1-h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1-h} = 1.$$

Die Exponentialfunktion ist also an der Stelle 0 differenzierbar und

$$\exp'(0) = 1 = \exp(0).$$

Für beliebiges  $x \in \mathbb{R}$  folgt die entsprechende Aussage durch die Funktionalgleichung. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x) \exp(h) - \exp(x)}{h} \\ &= \exp(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x) \cdot \exp'(0) = \exp(x) \end{aligned}$$

und somit gilt  $\exp'(x) = \exp(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Teil (vi) des Satzes zeigt deutlich, warum die Funktion  $\exp(x)$  so wichtig ist. Die Ableitung dieser Funktion ist die Funktion selber und die exp-Funktion ist, bis auf einen konstanten Faktor, die einzige Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  mit dieser Eigenschaft.

Die Teile (iii) und (v) aus Satz 7.22 zeigen, dass die Exponentialfunktion umkehrbar ist und dies führt zur Definition des *natürlichen Logarithmus*.

**Definition 7.23.** Der natürliche Logarithmus  $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Umkehrfunktion  $\exp^{-1}$  der Exponentialfunktion.

Die Notation für den natürlichen Logarithmus ist in der Literatur nicht ganz einheitlich und oftmals wird auch  $\log(x)$  anstelle von  $\ln(x)$  verwendet.

Aus Satz 7.11 ergibt sich das folgende Korollar.

**Korollar 7.24.** Der natürliche Logarithmus  $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt folgende Eigenschaften

- (i)  $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$  für alle  $x, y > 0$ , (Funktionalgleichung)
- (ii)  $\ln(x)$  ist streng monoton wachsend,
- (iii)  $\ln(x) < 0$  für  $x \in (0, 1)$ ,  $\ln(1) = 0$  und  $\ln(x) > 0$  für  $x > 1$ ,
- (iv)  $\ln(x)$  ist stetig auf ganz  $(0, \infty)$ ,
- (v)  $\ln(x)$  hat Bildbereich  $\mathbb{R}$  und

(vi)  $\ln(x)$  ist differenzierbar auf ganz  $(0, \infty)$  und hat die Ableitung  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .

BEWEIS. Für Teil (i) sei  $x = \exp(a)$  und  $y = \exp(b)$ . Dann folgt durch die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\ln(xy) = \ln(\exp(a)\exp(b)) = \ln(\exp(a+b)) = a+b = \ln(x) + \ln(y).$$

Die Eigenschaften (ii)–(v) folgen direkt aus den Sätzen 7.11 und 7.22.

Für die Ableitung sei  $y = \ln(x)$ . Die Umkehrregel aus Satz 7.11 angewandt für  $f(x) = \ln(x)$  und  $f^{-1}(x) = \exp(x)$  besagt dann für  $x > 0$

$$\frac{1}{\ln'(x)} = \exp'(y) = \exp(y) = \exp(\ln(x)) = x$$

und  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$  folgt. □

**7.3.3. Exponential- und Logarithmusfunktion zu gegebener Basis.** Neben der (natürlichen) Exponentialfunktion und dem natürlichen Logarithmus definiert man Exponentialfunktionen und Logarithmen zur Basis  $a > 0$ .

**Definition 7.25.** Sei  $a > 0$  eine reelle Zahl. Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $x \mapsto \exp(x \ln(a))$  heißt die Exponentialfunktion zur Basis  $a$ .

In der Literatur werden manchmal auch Funktionen der Form  $f(x) = c \cdot a^x$  als Exponentialfunktionen bezeichnet. Offensichtlich ist die Exponentialfunktion zur Basis  $e$  somit die Exponentialfunktion aus Definition 7.20.

**Satz 7.26.** Für jede reelle Zahl  $a > 0$  hat die Exponentialfunktion  $f(x) = \exp(x \ln(a))$  zur Basis  $a$  folgende Eigenschaften

- (i)  $f(x+y) = f(x)f(y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ , (Funktionalgleichung)
- (ii)  $f(x)$  ist stetig auf ganz  $\mathbb{R}$ ,
- (iii)  $f(q) = a^q$  für alle  $q \in \mathbb{Q}$ ,
- (iv)  $f(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n}$  für jedes  $r \in \mathbb{R}$  und jede rationale Folge  $q_n \rightarrow r$ ,
- (v) falls  $a > 1$ , dann ist  $f(x)$  streng monoton wachsend,
- (vi) falls  $a \in (0, 1)$ , dann ist  $f(x)$  streng monoton fallend und
- (vii)  $f(x)$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar und  $f'(x) = f(x) \ln a$ .

BEWEISSKIZZE FÜR SATZ 7.26. Teil (i) folgt direkt aus der Funktionalgleichung der (natürlichen) Exponentialfunktion und Teil (ii) folgt, da die Komposition stetiger Funktionen stetig ist (Beweis ist eine gute Übung).

Teil (iii) zeigt man zuerst für  $q = 1/n$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit Induktion, dann für alle  $z \in \mathbb{Z}$  und schließlich mit der Funktionalgleichung für alle  $q = m/n$  mit  $m \in \mathbb{Z}$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

Teil (iv) ist dann eine Konsequenz der Stetigkeit, die wir in Teil (ii) gezeigt hatten.

Die Aussagen (v) und (vi) rechnet man dann mit Hilfe von der Monotonie von  $\exp(x)$  und (iii) nach.

Die Ableitung berechnen wir mit der Kettenregel

$$f'(x) = (\exp(x \ln(a)))' = \exp(x \ln a) \cdot (x \ln a)' = f(x) \cdot \ln a .$$

□

Aus Teil (iv) folgt nun für allgemeines  $x \in \mathbb{R}$  die Identität

$$\exp(x) = e^x .$$

Allgemeiner haben wir durch (iv) eine äquivalente Definition von Potenzen mit reellen Koeffizienten erhalten

$$a^r = \exp(r \ln(a))$$

für alle reellen Zahlen  $a > 0$  und  $r \in \mathbb{R}$ . Die Funktionalgleichung aus Teil (i) übersetzt sich dann zu dem Potenzgesetz

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

für alle  $a > 0$  und  $x, y \in \mathbb{R}$ . Als Korollare halten wir die allgemeinen Potenzgesetze und die Verallgemeinerung von Satz 7.16 fest.

**Satz 7.27** (Potenzgesetze). *Für reelle Zahlen  $a, b > 0$  und  $x, y \in \mathbb{R}$  gelten die folgenden Rechenregeln*

- (i)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ,
- (ii)  $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ ,
- (iii)  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$  und
- (iv)  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ .

**BEWEIS.** Die erste Identität hatten wir bereits aus der Funktionalgleichung hergeleitet. Mithilfe der Funktionalgleichung des natürlichen Logarithmus (siehe Korollar 7.24 (i)), erhalten wir ganz ähnlich die zweite Rechenregel durch

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^x &= \exp(x \ln(ab)) = \exp(x(\ln(a) + \ln(b))) \\ &= \exp(x \ln(a) + x \ln(b)) = \exp(x \ln(a)) \cdot \exp(x \ln(b)) = a^x \cdot b^x . \end{aligned}$$

Für die dritte Identität beobachten wir zuerst, dass aus  $a^x = \exp(x \ln(a))$  folgt

$$\ln(a^x) = \ln(\exp(x \ln(a))) = x \ln(a) .$$

Die gesuchte Identität ergibt sich dann durch

$$a^{x \cdot y} = \exp((x \cdot y) \ln(a)) = \exp(y \cdot x \ln(a)) = \exp(y \ln(a^x)) = (a^x)^y .$$

Die letzte Rechenregel folgt aus der ersten und der Identität  $a^{-y} = \frac{1}{a^y}$ , die wir durch

$$1 = \exp(0) = \exp(y \ln(a) - y \ln(a)) = \exp(y \ln(a)) \cdot \exp(-y \ln(a)) = a^y \cdot a^{-y}$$

durch Umstellen erhalten. □

**Satz 7.28.** Sei  $r \in \mathbb{R}$  und  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $x \mapsto x^r$ . Dann ist  $f$  auf  $(0, \infty)$  differenzierbar und es gilt  $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$ .

BEWEIS. Da  $x^r = \exp(r \ln(x))$ , folgt mit der Kettenregel

$$f'(x) = (x^r)' = \exp'(r \ln(x)) \cdot (r \ln(x))' = \exp(r \ln(x)) \cdot r \cdot \frac{1}{x} = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r \cdot x^{r-1},$$

wobei wir im letzten Schritt die letzte Rechenregel Satz 7.27 angewandt haben.  $\square$

Es ist wichtig, dass Exponentialfunktionen  $a^x$  nicht mit Potenzfunktionen  $x^r$  verwechselt werden. Bei den Potenzfunktionen wird die Basis variiert, bei den Exponentialfunktionen der Exponent.

Da die Exponentialfunktion  $x \mapsto a^x = \exp(x \ln(a))$  für  $a \neq 1$  streng monoton und stetig ist (siehe Eigenschaften (ii), (v) und (vi) in Satz 7.26), besitzt sie eine Umkehrfunktion. Diese Umkehrfunktion definiert den *Logarithmus zur Basis a*.

**Definition 7.29.** Ist  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  und  $a \neq 1$ , so bezeichnet man die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $x \mapsto a^x = \exp(x \ln(a))$  als Logarithmus zur Basis  $a$  und man schreibt  $\log_a(x)$  für den Wert dieser Umkehrfunktion an der Stelle  $x$ .

Ist  $0 < a < 1$ , so gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$ . Ist  $a > 1$ , so gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ . Damit ist in beiden Fällen der Definitionsbereich der Logarithmusfunktion  $x \rightarrow \log_a(x)$  die Menge  $(0, \infty)$ .

Offensichtlich ist der Logarithmus zur Basis  $e$  dann der natürliche Logarithmus, d. h.

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

für alle  $x \in (0, \infty)$ . Andere prominente Logarithmusfunktionen sind die zur Basis 2 ( $\log_2(x)$ , die Umkehrfunktion von  $2^x$ ) und die zur Basis 10 ( $\log_{10}(x)$ , die Umkehrfunktion von  $10^x$ ), deren Funktionsgraphen in Abbildung 7.1 abgebildet sind.

Als Umkehrfunktionen der stetigen Exponentialfunktionen sind die Logarithmusfunktionen ebenfalls stetig, streng monoton und differenzierbar (siehe Satz 7.11). Wir fassen diese Eigenschaften im folgenden Satz zusammen.

**Satz 7.30.** Sei  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  und  $a \neq 1$ . Der Logarithmus  $\log_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  zur Basis  $a$  hat folgende Eigenschaften

- (i)  $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$  für alle  $x, y > 0$ , (Funktionalgleichung)
- (ii)  $\log_a(1) = 0$ ,
- (iii)  $\log_a(x)$  ist stetig auf ganz  $(0, \infty)$ ,
- (iv) falls  $a > 1$ , dann ist  $\log_a(x)$  streng monoton wachsend,
- (v) falls  $a \in (0, 1)$ , dann ist  $\log_a(x)$  streng monoton fallend und
- (vi)  $\log_a(x)$  ist auf ganz  $(0, \infty)$  differenzierbar und  $\log'_a(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ .

BEWEIS. Die Funktionalgleichung erhalten wir durch die entsprechende Gleichung der Exponentialfunktion zur Basis  $a$  aus (i) von Satz 7.26 (bzw. dem ersten Potenzgesetz

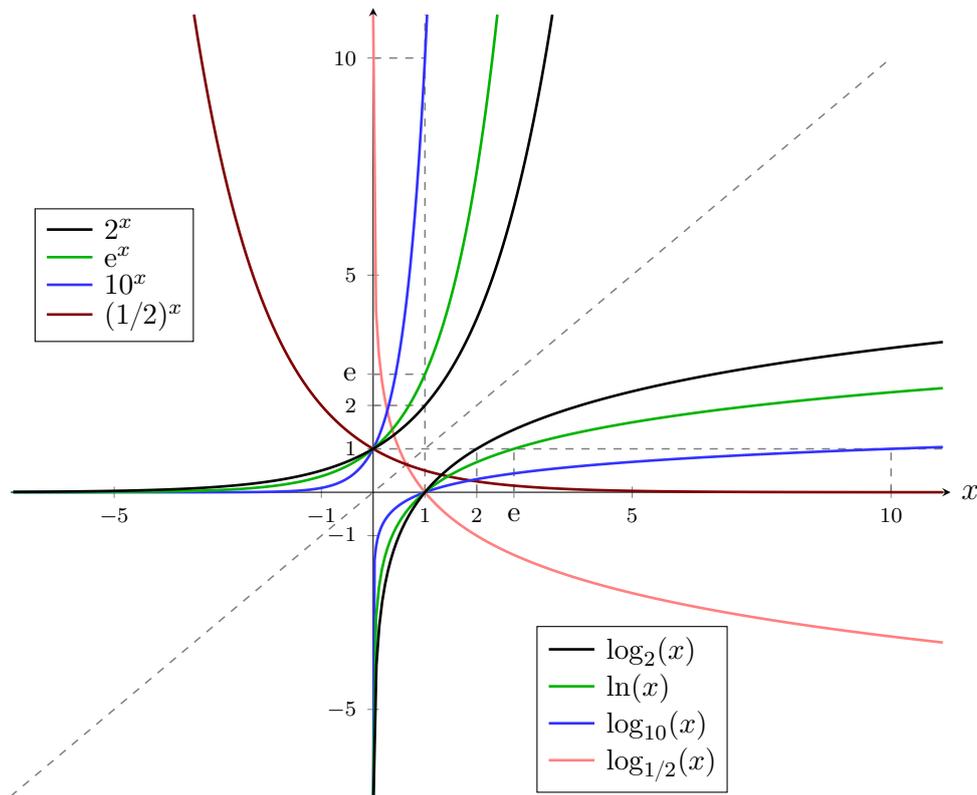


ABBILDUNG 7.1. Wichtige Exponential- und Logarithmusfunktionen

aus Satz 7.27). Wähle  $\xi, \zeta \in \mathbb{R}$ , sodass  $a^\xi = x$  und  $a^\zeta = y$  gilt. Dann folgt

$$\log_a(xy) = \log_a(a^\xi a^\zeta) = \log_a(a^{\xi+\zeta}) = \xi + \zeta = \log_a(x) + \log_a(y).$$

Die Eigenschaft (ii) folgt aus  $a^0 = 1$ .

Die anderen Eigenschaften (iii)–(vi) folgen aus den entsprechenden Eigenschaften (ii), (v)–(vii) aus Satz 7.26 zusammen mit Satz 7.11.  $\square$

Analog zu den Potenzgesetzen in Satz 7.27 gelten folgende Logarithmengesetze.

**Satz 7.31** (Logarithmengesetze). Seien  $a, x, y, r \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$  und  $a \neq 1$ . Dann gilt

- (i)  $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ ,
- (ii)  $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ ,
- (iii)  $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$ ,
- (iv)  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

BEWEIS. Die erste Identität ist genau die Funktionalgleichung aus Teil (i) von Satz 7.30.

Die zweite Gleichung folgt aus

$$\ln(x) = \ln(a^{\log_a(x)}) = \ln(\exp(\log_a(x) \cdot \ln(a))) = \log_a(x) \cdot \ln(a).$$

durch Umstellen.

Die dritte Gleichung beweist man nun zuerst für den natürlichen Logarithmus

$$\ln(x^r) = \ln(\exp(r \ln(x))) = r \cdot \ln(x)$$

und mit (ii) erhalten wir

$$\log_a(x^r) = \frac{\ln(x^r)}{\ln(a)} = \frac{r \cdot \ln(x)}{\ln(a)} = r \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = r \cdot \log_a(x).$$

Schließlich folgern wir (iv) aus (i)

$$\log_a\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \log_a(x) + \log_a\left(\frac{1}{y}\right)$$

kombiniert mit der Beobachtung  $\log_a(1/y) = -\log_a(y)$ , die sich aus

$$0 = \log_a(1) = \log_a\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = \log_a(y) + \log_a\left(\frac{1}{y}\right)$$

ergibt. □

Die Rechenregel (ii) aus Satz 7.31 zeigt, dass man Logarithmen zu verschiedenen Basen leicht ineinander umrechnen kann. Allgemein kann man genauso zeigen

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

für alle  $b \in \mathbb{R}$  mit  $b > 0$  und  $b \neq 1$ . Die Logarithmen  $\log_a(x)$  und  $\log_b(x)$  unterscheiden sich also nur um einen konstanten Faktor, nämlich um den Faktor  $\frac{1}{\log_b(a)}$ .

**Beispiel 7.32.** (a) Es sei  $f(x) = 2^{-x^2}$ . Dann gilt

$$f'(x) = 2^{-x^2} \cdot \ln 2 \cdot (-x^2)' = 2^{-x^2} \cdot \ln 2 \cdot (-2x) = -2x \cdot 2^{-x^2} \cdot \ln 2.$$

(b) Es sei  $f(x) = x^r \cdot \log_2 x$  mit  $D(f) = (0, \infty)$  und  $r \in \mathbb{R}$ . Dann gilt nach der Produktregel

$$f'(x) = r x^{r-1} \cdot \log_2 x + x^r \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x} = x^{r-1} \left( r \log_2 x + \frac{1}{\ln 2} \right).$$

(c) Es sei  $f(x) = \ln(\ln x)$  mit  $D(f) = (1, \infty)$ . Dann gilt nach der Kettenregel

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \ln x}.$$

Wir betrachten noch ein interessantes Beispiel, nämlich das sogenannte *logarithmische Differenzieren*.

Für  $x > 0$  sei  $f(x) = x^x$ . Wir wollen  $f'(x)$  bestimmen. Es gilt

$$(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot \left( \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x \cdot (1 + \ln x).$$

Anstelle von  $f(x)$  schreibt man also  $e^{\ln(f(x))}$  und berechnet die Ableitung nach Anwendung von Rechenregeln für den Logarithmus mit Hilfe der Kettenregel. Diese Methode, Ableitungen zu berechnen, ist zum Beispiel immer dann ein vielversprechender Ansatz, wenn sich die Funktion  $f$  auf nicht-triviale Weise in der Form  $f(x) = g(x)^{h(x)}$  schreiben lässt.

## §7.4 TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

Eine weitere wichtige Funktionenklasse sind die trigonometrischen Funktionen, die wir hier geometrisch einführen (siehe Abbildung 7.2). Diese Einführung appelliert an die geometrische Intuition und wir werden daher nicht alle hier getroffenen Aussagen beweisen können. Für die geometrische Einführung betrachten wir den *Einheitskreis*,

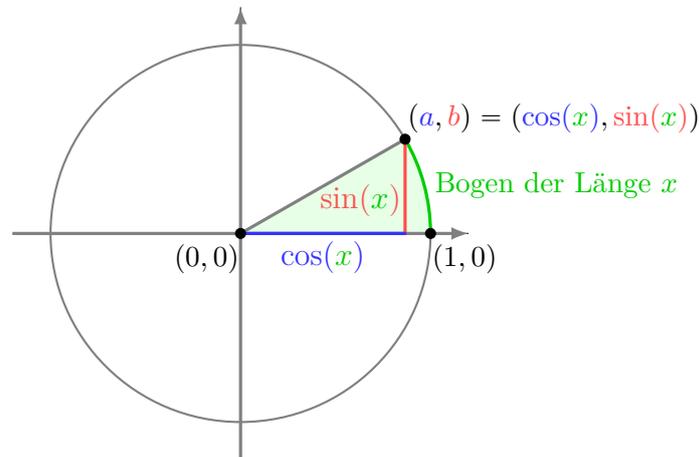


ABBILDUNG 7.2. Sinus und Kosinus am Einheitskreis

d. h. die Menge der Punkte  $(a, b)$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ , die die Gleichung

$$a^2 + b^2 = 1$$

erfüllen. Der Einheitskreis besteht aus den Punkten der Ebene, deren Abstand zum Nullpunkt genau 1 ist. Es handelt sich also um den Kreis um den Nullpunkt mit Radius 1. Die Kreiszahl  $\pi$  ist die Hälfte des Umfangs des Einheitskreises. Der Einheitskreis hat also den Umfang  $2\pi$ . Man kann zeigen, dass  $\pi$  irrational ist, dass also  $\pi \notin \mathbb{Q}$  gilt. Die ersten Dezimalstellen von  $\pi$  lauten wie folgt

$$\pi = 3.1415926535 \dots$$

Sei nun  $x \in [0, \infty)$ . Wir durchlaufen den Einheitskreis ausgehend von dem Punkt  $(1, 0)$  entgegen dem Uhrzeigersinn bis die Länge des durchlaufenen Bogens genau  $x$  ist. Sei  $(a, b)$  der Punkt, an dem wir zum stehen kommen. Wir definieren nun

$$\cos(x) := a \quad \text{und} \quad \sin(x) := b.$$

Dadurch haben wir die Funktionen  $\cos, \sin: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Wir können diese Funktionen auf negative Zahlen fortsetzen, indem wir im Falle  $x < 0$  den Kreis im Uhrzeigersinn durchlaufen. Die beiden Funktionen  $\sin$  (gelesen *Sinus*) und  $\cos$  (gelesen *Kosinus*) sind also auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert.

**Bemerkung 7.33.** Für eine mathematisch präzise Einführung benutzt man in der Analysis die Fortsetzung der Exponentialfunktion auf die *komplexen Zahlen*  $\mathbb{C}$  durch

die schöne Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

für die *imaginäre Einheit*  $i \in \mathbb{C}$  oder im reellen die Reihendarstellung

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

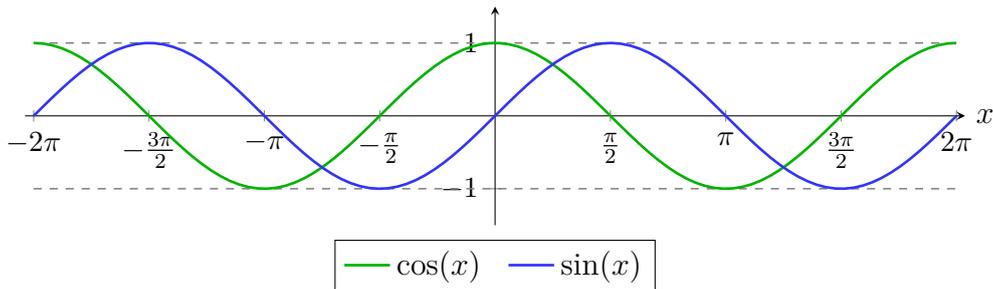


ABBILDUNG 7.3. Sinus und Kosinus

Aus dieser Definition folgt

$$\begin{aligned} \sin(0) &= 0, & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1, & \sin(\pi) &= 0, & \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= -1, & \sin(2\pi) &= 0, \\ \cos(0) &= 1, & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0, & \cos(\pi) &= -1, & \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 0, & \cos(2\pi) &= 1. \end{aligned}$$

Außerdem gelten für alle  $n \in \mathbb{Z}$  die Gleichungen

$$\cos(2\pi n + x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(2\pi n + x) = \sin(x).$$

Die Funktionen Sinus und Kosinus sind also periodisch mit einer Periode der Länge  $2\pi$ .

Aus der Definition von  $\sin$  und  $\cos$  ergeben sich auch noch folgende Eigenschaften, wobei wir  $\sin^2(x)$  für  $(\sin(x))^2$  schreiben und  $\cos^2(x)$  für  $(\cos(x))^2$

$$\begin{aligned} \sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1, \\ \sin(-x) &= -\sin(x), \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\cos(-x) = \cos(x). \tag{7.5}$$

Funktionen mit der Eigenschaft  $f(-x) = -f(x)$  nennt man *ungerade Funktionen*, da Polynome, in denen nur ungerade Exponenten auftreten, diese Eigenschaft haben. Funktionen mit der Eigenschaft  $f(x) = f(-x)$  nennt man *gerade Funktionen*, da Polynome, in denen nur gerade Exponenten auftreten, diese Eigenschaft haben.

**Satz 7.34.** Die Funktionen  $\cos$  und  $\sin$  sind auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig.

Für den Beweis dieser Tatsache verweisen wir auf die gängige Literatur. Ebenfalls ohne Beweis geben wir die folgenden Eigenschaften von  $\sin$  und  $\cos$  an, die *Additionstheoreme* genannt werden

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1) \cos(x_2) + \cos(x_1) \sin(x_2), \quad (7.6)$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos(x_1) \cos(x_2) - \sin(x_1) \sin(x_2). \quad (7.7)$$

Aus den Additionstheoremen ergibt sich

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \quad (7.8)$$

Auf ähnliche Weise zeigt man die folgenden Aussagen

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x), \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \quad \text{und} \quad \cos(x + \pi) = -\cos(x). \quad (7.9)$$

Schließlich gilt auch noch

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \quad \text{und} \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Die Funktionen  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  und  $\cot$  nennt man *trigonometrische Funktionen*. Dabei sind  $\tan$  (*Tangens*) und  $\cot$  (*Kotangens*) wie folgt definiert. Für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\cos(x) \neq 0$  setzt man

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\sin(x) \neq 0$  setzt man

$$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

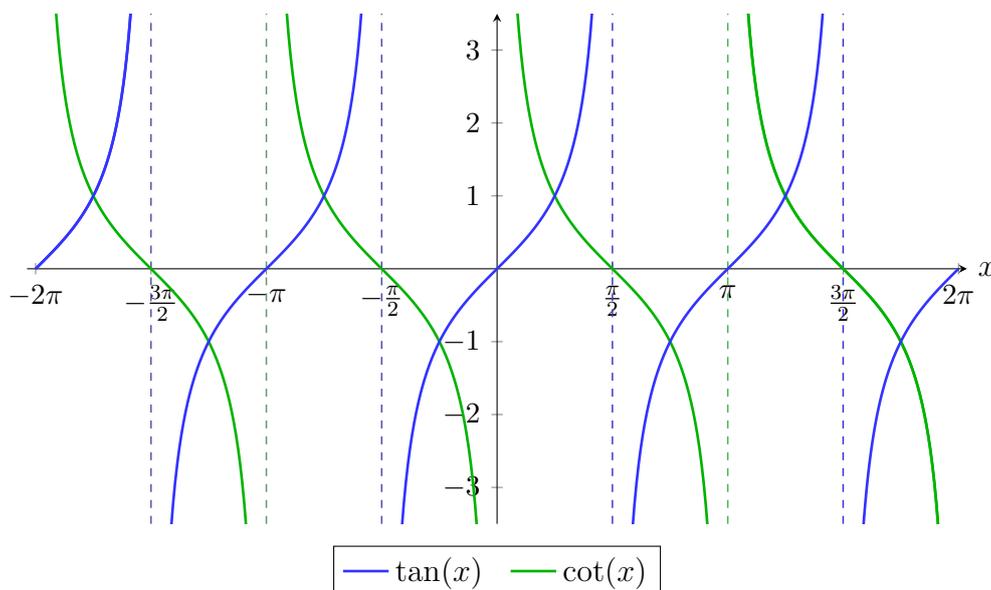


ABBILDUNG 7.4. Tangens und Kotangens

Die Nullstellen des Kosinus liegen bei  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  und so weiter. Damit ist der Tangens an den Stellen  $(\frac{1}{2} + n)\pi, n \in \mathbb{Z}$ , nicht definiert. Die Nullstellen des Sinus liegen bei  $0, \pi,$

$2\pi$  und so weiter. Damit ist der Kotangens an den ganzzahligen Vielfachen von  $\pi$  nicht definiert. Man kann leicht nachrechnen, dass der Tangens und der Kotangens beide periodisch mit der Periode  $\pi$  sind.

Mithilfe des Strahlensatzes lassen sich  $\tan(x)$  und  $\cot(x)$  auch direkt in Abbildung 7.2 einzeichnen, da der Radius vom Einheitskreis 1 ist.

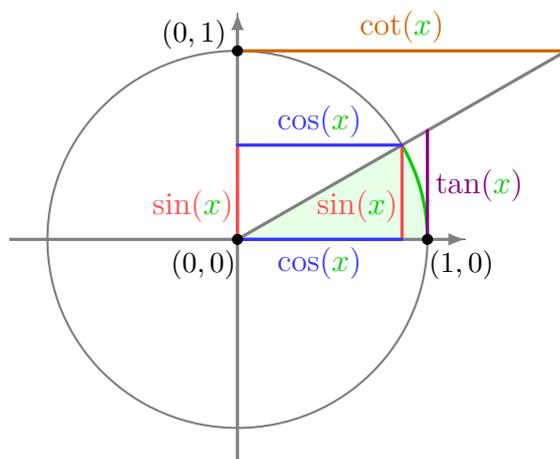


ABBILDUNG 7.5. Tangens und Kotangens am Einheitskreis

An dieser Stelle bemerken wir noch, dass der Winkel  $\alpha$  in der Mathematik immer im *Bogenmaß* angegeben wird, d.h., so, wie wir das oben beschrieben haben. In anderen Gebieten werden Winkel bekanntlich in Grad angegeben, wobei der Vollkreis dann einem Winkel von  $360^\circ$  entspricht. Ein Winkel  $\alpha$  im Bogenmaß entspricht  $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot 360^\circ$ . Umgekehrt entsprechen  $x$  Grad einem Bogenmaß von  $\frac{x}{360} \cdot 2\pi = \frac{x}{180} \cdot \pi$ .

Wir bestimmen nun die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen. Hier werden wieder alle Winkel im Bogenmaß angegeben. Für kleine  $x$  nahe Null ist der Wert von  $x$  und  $\sin(x)$  fast gleich sind.

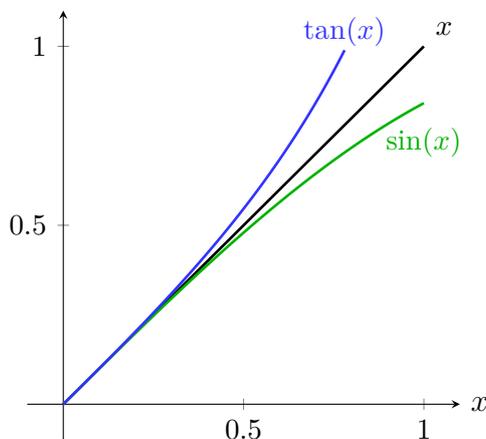


ABBILDUNG 7.6. Veranschaulichung von Ungleichung (7.10)

Tatsächlich gilt für  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  die Ungleichung

$$\sin(x) < x < \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \quad (7.10)$$

Dividiert man durch  $\sin(x)$  und geht dann zu den Kehrwerten über, so ergibt sich

$$1 > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x).$$

Ist nun  $(x_n)$  eine Folge reeller Zahlen  $> 0$  mit  $x_n \rightarrow 0$ , so ergibt sich wegen der Stetigkeit von  $\cos$  der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1.$$

Dasselbe gilt für jede Folge  $(x_n)$  negativer Zahlen, die gegen Null konvergiert. Insgesamt ergibt sich

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1. \quad (7.11)$$

**Satz 7.35.** Die Funktionen  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  und  $\cot$  sind an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \cos(x), & \tan'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x), \\ \cos'(x) &= -\sin(x), & \cot'(x) &= \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x). \end{aligned}$$

BEWEIS. Wir zeigen zunächst  $\sin'(x) = \cos(x)$ . Die anderen Ableitungen lassen sich dann leicht berechnen. Zuerst leiten wir aus den Additionstheoremen die folgende Identität für alle  $x, h \in \mathbb{R}$  nach

$$\sin(x+h) - \sin(x) = 2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right). \quad (7.12)$$

Das Additionstheorem (7.6) angewandt mit  $x_1 = (2x+h)/2$  und  $x_2 = h/2$  ergibt

$$\sin(x+h) = \sin\left(\frac{2x+h}{2} + \frac{h}{2}\right) \stackrel{(7.6)}{=} \sin\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cos\left(\frac{h}{2}\right) + \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right). \quad (7.13)$$

Eine weitere Anwendung mit  $x_1 = (2x+h)/2$  und  $x_2 = h/2$  unter Berücksichtigung von (7.4) und (7.5) führt zu

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{2x+h}{2} - \frac{h}{2}\right) \stackrel{(7.4-7.6)}{=} \sin\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cos\left(\frac{h}{2}\right) - \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right). \quad (7.14)$$

Wenn wir nun (7.14) von (7.13) abziehen, erhalten wir

$$\sin(x+h) - \sin(x) = 2 \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right) \quad (7.15)$$

Somit gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \stackrel{(7.15)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2}.$$

Mit der Stetigkeit von  $\cos(x)$  und (7.11) folgt schließlich

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot 1 = \cos(x),$$

wie behauptet.

Für die anderen Ableitungen gilt nun

$$\cos'(x) \stackrel{(7.8)}{=} \left( \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \right)' = \cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \stackrel{(7.9)}{=} -\sin x,$$

und mit der Quotientenregel folgt

$$\tan'(x) = \left( \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

und

$$\cot'(x) = \left( \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)' = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x).$$

□

Wir diskutieren nun noch die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktion. Offenbar ist keine der trigonometrischen Funktionen, die wir bisher diskutiert haben, injektiv. Wenn man jedoch die trigonometrischen Funktionen auf geeignete Intervalle einschränkt, so existieren Umkehrfunktionen.

- (1) Die Funktion  $\sin(x)$  ist auf dem Intervall  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  streng monoton wachsend. Die Funktionswerte von  $\sin$  auf diesem Intervall laufen von  $-1$  bis  $1$ . Damit existiert eine Umkehrfunktion

$$\arcsin: [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

von  $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ . Die Funktion  $\arcsin$  wird *Arkussinus* gelesen. Da  $\sin$  auf  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  streng monoton wächst und stetig ist, ist auch  $\arcsin$  streng monoton wachsend und stetig.

- (2) Die Funktion  $\cos(x)$  ist auf dem Intervall  $[0, \pi]$  stetig streng monoton fallend. Wieder werden alle Werte in dem Intervall  $[-1, 1]$  als Funktionswerte angenommen. Damit existiert eine Umkehrfunktion *Arkuskosinus*

$$\arccos: [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

von  $\cos: [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ , die stetig und monoton fallend ist.

- (3) Die Funktion  $\tan(x)$  ist auf dem Intervall  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  stetig und streng monoton wachsend. Es werden jedoch alle reellen Zahlen als Funktionswerte angenommen. Damit existiert eine Umkehrfunktion *Arkustangens*

$$\arctan: \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

die stetig und monoton wachsend ist.

- (4) Die Funktion  $\cot(x)$  ist auf dem Intervall  $(0, \pi)$  stetig und streng monoton fallend. Es werden wieder alle reellen Zahlen als Funktionswerte angenommen. Damit existiert eine Umkehrfunktion *Arkuskotangens*

$$\operatorname{arccot}: \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi),$$

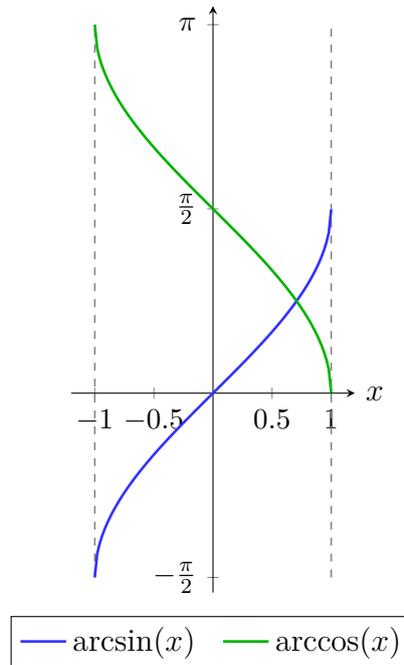


ABBILDUNG 7.7. Umkehrfunktionen vom Sinus und Kosinus

die stetig und monoton fallend ist.

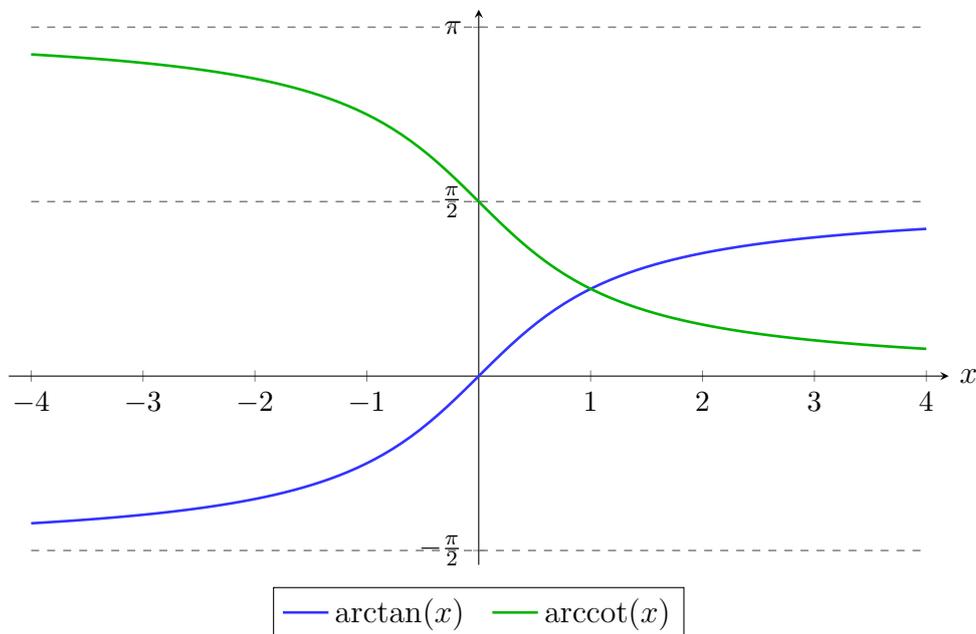


ABBILDUNG 7.8. Umkehrfunktionen vom Tangens und Kotangens

**Satz 7.36.** Die Funktionen Arkussinus und Arkuskosinus sind auf  $(-1, 1)$  differenzierbar und die Funktionen Arkustangens und Arkuskotangens sind auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar.

Für die Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \arccos'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2}, & \operatorname{arccot}'(x) &= -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Wir verwenden die Umkehrregel. Für alle  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  ist die Ableitung des Sinus an der Stelle  $x$  von 0 verschieden. Sei  $y = \sin(x)$ . Dann gilt

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Analog zeigt man die Formel für  $\arccos'(x)$ .

Für  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  ist  $\tan'(x)$  von Null verschieden (Übungsaufgabe). Sei  $y = \tan(x)$ . Dann gilt nach der Umkehrregel

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Analog zeigt man die Formel für  $\operatorname{arccot}'(x)$ . □

### §7.5 GLOBALE UND LOKALE EXTREMA

In der Praxis möchte man oft das Maximum oder Minimum einer Funktion bestimmen. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit notwendigen und hinreichenden Kriterien für Extremwerte von stetigen und differenzierbaren Funktionen.

**Definition 7.37.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Wir sagen,  $f$  hat ein globales (oder auch absolutes) Maximum an der Stelle  $\hat{x} \in [a, b]$ , falls  $f(\hat{x})$  das größte Element der Menge

$$f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

ist, d. h.  $f(\hat{x}) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ .

- Wir sagen,  $f$  hat ein lokales Maximum an der Stelle  $\hat{x} \in (a, b)$ , falls es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $x \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$  gilt

$$f(\hat{x}) \geq f(x).$$

- Analog definiert man absolute und lokale Minima. Ein globales/lokales Maximum oder Minimum nennt man auch Extremum oder Extremwert von  $f$ .

Als Erstes zeigen wir, dass für stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen immer globale Extrema existieren.

**Satz 7.38.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann existieren  $x_{\max}, x_{\min} \in [a, b]$ , so dass  $f$  bei  $x_{\max}$  ein absolutes Maximum hat und bei  $x_{\min}$  ein absolutes Minimum.

BEWEIS. Sei  $M := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ . Hierbei erlauben wir zuerst einmal auch  $M = \infty$  für den Fall, dass  $f$  nicht nach oben beschränkt ist. In jedem Fall gibt es ein Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in [a, b]$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$ . Da das Intervall  $[a, b]$  beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 5.34) eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und sei  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_{\max}$ .

Wir können leicht einsehen, dass  $x_{\max}$  in dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  liegt. Wäre nämlich  $x_{\max} < a$ , dann würde für  $\delta = (a - x_{\max})/2$  kein Folgenglied von  $x_{n_k} \in [a, b]$  einen Abstand kleiner  $\delta$  zu  $x_{\max}$  haben, was  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_{\max}$  widerspricht. Genauso zeigt man  $x_{\max} \leq b$  und somit gilt  $x_{\max} \in [a, b]$ .

Schließlich folgt aus der Stetigkeit von  $f$

$$f(x_{\max}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M.$$

Insbesondere gilt also  $M \in \mathbb{R}$  und  $f$  hat an der Stelle  $x_{\max} \in [a, b]$  ein globales Maximum. Der Beweis für die Existenz des globalen Minimums ist analog.  $\square$

Satz 7.38 gibt uns leider keine Information über die Stellen  $x_{\max}$  und  $x_{\min}$  an den die globalen Extrema der stetigen Funktion  $f$  angenommen werden. Im Folgenden untersuchen wir differenzierbare Funktionen auf lokale Extremwerte. Der nächste Satz liefert ein notwendiges Kriterium für lokale Extremwerte.

**Satz 7.39.** Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $\hat{x} \in (a, b)$  differenzierbar. Hat  $f$  an der Stelle  $\hat{x}$  ein (lokales) Extremum, so ist  $f'(\hat{x}) = 0$ .

BEWEIS. Wir betrachten den Fall, dass  $f$  bei  $\hat{x}$  ein lokales Maximum hat. Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $x_n = \hat{x} - \frac{1}{n}$ . Da  $f$  bei  $\hat{x}$  ein lokales Maximum hat, gilt für genügend große  $n$  die Ungleichung

$$\frac{f(x_n) - f(\hat{x})}{x_n - \hat{x}} \geq 0.$$

Definieren wir  $y_n = \hat{x} + \frac{1}{n}$ , so gilt für genügend große  $n$  die Ungleichung

$$\frac{f(y_n) - f(\hat{x})}{y_n - \hat{x}} \leq 0.$$

Da  $f$  bei  $\hat{x}$  differenzierbar ist, gilt

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(\hat{x})}{x_n - \hat{x}} = f'(\hat{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(\hat{x})}{y_n - \hat{x}} \leq 0.$$

Damit ist  $f'(\hat{x}) = 0$ .  $\square$

Die Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums in Satz 7.39 ist notwendig, aber nicht hinreichend. Die Ableitung der Funktion  $f(x) = x^3$  ist  $3x^2$  und insbesondere ist  $f'(0) = 0$ . Aber die Funktion  $f$  ist streng monoton wachsend und hat überhaupt keine lokalen Extrema.

Ein zentraler Satz in diesem Kapitel ist der folgende *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*.

**Satz 7.40** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetig und auf dem offenen Intervall  $(a, b)$  differenzierbar. Dann gibt es mindestens ein  $\hat{x} \in (a, b)$  mit

$$f'(\hat{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

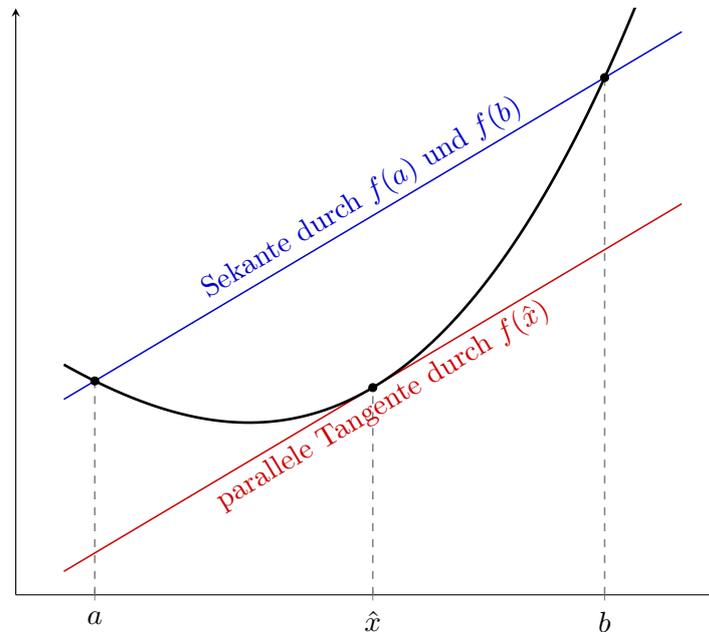


ABBILDUNG 7.9. Veranschaulichung der Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

**BEWEIS.** Zuerst beweisen wir den Spezialfall  $f(a) = f(b)$ , der auch als *Satz von Rolle* bekannt ist. Sei also  $f(a) = f(b)$ . Falls  $f$  konstant ist, dann ist  $f'(x) = 0 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  für alle  $x \in (a, b)$  und somit können wir annehmen, dass  $f$  nicht konstant ist. Dann gibt es aber ein  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f(x_0) \neq f(a)$ . O. B. d. A. sei  $f(x_0) < f(a)$ . Somit wird das nach Satz 7.38 existierende globale Minimum von  $f$  irgendwo in dem offenen Intervall  $(a, b)$  angenommen und sei  $x_{\min} \in (a, b)$  so gewählt. Mit Satz 7.39 folgt  $f'(x_{\min}) = 0$ , was den Beweis des Satzes von Rolle abschließt.

Den allgemeinen Fall des Mittelwertsatzes führen wir auf den Spezialfall zurück. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Diese Funktion ist stetig auf  $[a, b]$  und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Da  $g(a) = g(b) = 0$ , gibt es nach dem Satz von Rolle ein  $\hat{x} \in (a, b)$  mit  $g'(\hat{x}) = 0$  und es folgt

$$0 = g'(\hat{x}) = f'(\hat{x}) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f'(\hat{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Geometrisch besagt der Mittelwertsatz, dass es einen Punkt  $\hat{x} \in (a, b)$  gibt, sodass die Tangente an  $f$  durch  $(\hat{x}, f(\hat{x}))$  parallel zur Sekante durch die Punkt  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$  liegt. Eine wichtige Konsequenz des Mittelwertsatzes ist, dass zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion immer ein Punkt mit Ableitung Null liegt. Ferner ergeben sich die folgenden Korollare.

Wir hatten bereits gesehen, dass die Ableitung von konstanten Funktionen überall gleich 0 ist. Die Umkehrung dieser Aussage gilt auch. Anschaulich besagt das folgende Korollar, wenn eine Funktion nirgends steigt oder fällt, so ist sie konstant.

**Korollar 7.41.** *Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetig und auf dem offenen Intervall  $(a, b)$  differenzierbar. Falls  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , so ist  $f$  auf dem Intervall  $[a, b]$  konstant.*

BEWEIS. Angenommen  $f(x_1) \neq f(x_2)$  für zwei Punkte  $x_1, x_2 \in [a, b]$  mit  $x_1 < x_2$ , dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein  $\hat{x} \in (x_1, x_2)$  mit

$$f'(\hat{x}) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0.$$

Aber dies widerspricht der Annahme  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b)$ .  $\square$

Das folgende Korollar behandelt die Fälle, wenn die Ableitung durchgehend positiv oder negativ ist.

**Korollar 7.42.** *Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetig und auf dem offenen Intervall  $(a, b)$  differenzierbar. Dann gilt*

- (i) falls  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , so ist  $f$  auf  $[a, b]$  streng monoton wachsend.
- (ii) falls  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , so ist  $f$  auf  $[a, b]$  monoton wachsend.
- (iii) falls  $f'(x) < 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , so ist  $f$  auf  $[a, b]$  streng monoton fallend.
- (iv) falls  $f'(x) \leq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , so ist  $f$  auf  $[a, b]$  monoton fallend.

BEWEIS. Wir beweisen nur die erste Aussage (i). Angenommen  $f$  ist nicht streng monoton wachsend. Dann gibt es zwei Punkte  $x_1, x_2 \in [a, b]$  mit  $x_1 < x_2$ , sodass  $f(x_1) \geq f(x_2)$  und der Mittelwertsatz liefert ein  $\hat{x} \in (x_1, x_2)$  mit

$$f'(\hat{x}) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0,$$

was der Annahme  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in (a, b)$  widerspricht. Der Beweis der anderen Teile ist analog.  $\square$

Eine wichtige Anwendung der Differentialrechnung ist das Auffinden sogenannter Extremwerte von Funktionen. In Satz 7.39 hatten wir bereits ein notwendiges Kriterium für lokale Extrema kennengelernt. Eine notwendige Bedingung für lokale Extrema liefert das nächste Korollar.

**Korollar 7.43.** *Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem offenen Intervall  $(a, b)$  differenzierbar und für eine Stelle  $\hat{x} \in (a, b)$  gelte  $f'(\hat{x}) = 0$ .*

- (a) Angenommen, es gibt ein  $\delta > 0$ , sodass  $f'(x) \geq 0$  auf dem Intervall  $(\hat{x} - \delta, \hat{x})$  gilt und  $f'(\hat{x}) \leq 0$  auf dem Intervall  $(\hat{x}, \hat{x} + \delta)$ . Dann hat  $f$  bei  $\hat{x}$  ein lokales Maximum.
- (b) Angenommen, es gibt ein  $\delta > 0$ , sodass  $f'(x) \leq 0$  auf dem Intervall  $(\hat{x} - \delta, \hat{x})$  gilt und  $f'(\hat{x}) \geq 0$  auf dem Intervall  $(\hat{x}, \hat{x} + \delta)$ . Dann hat  $f$  bei  $\hat{x}$  ein lokales Minimum.

BEWEIS. Wir zeigen nur (a), da (b) auf dieselbe Weise folgt. Sei  $x \in (\hat{x} - \delta, \hat{x})$ . Falls  $x \leq \hat{x}$  gilt, so ist  $f$  nach Teil (ii) aus Korollar 7.42 auf dem Intervall  $[x, \hat{x}]$  monoton wachsend. Also ist  $f(x) \leq f(\hat{x})$ .

Falls  $x \geq \hat{x}$  gilt, so ist  $f$  nach Teil (iv) aus Korollar 7.42 auf dem Intervall  $[\hat{x}, x]$  monoton fallend. Es folgt wieder  $f(x) \leq f(\hat{x})$ . Das zeigt, dass  $f$  bei  $\hat{x}$  ein lokales Maximum hat.  $\square$

Mit dieser Charakterisierung ergeben sich die folgenden bekannten Kriterien für lokale Extremwerte zweifach differenzierbarer Funktionen.

**Korollar 7.44.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem offen Intervall  $(a, b)$  zweimal differenzierbar und für eine Stelle  $\hat{x} \in (a, b)$  gelte  $f'(\hat{x}) = 0$ .

- (a) Ist  $f''(\hat{x}) < 0$ , so hat  $f$  an der Stelle  $\hat{x}$  ein lokales Maximum.
- (b) Ist  $f''(\hat{x}) > 0$ , so hat  $f$  an der Stelle  $\hat{x}$  ein lokales Minimum.

BEWEIS. Wir zeigen wieder nur Aussage (a). Es gilt

$$0 > f''(\hat{x}) = \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{f'(x) - f'(\hat{x})}{x - \hat{x}}.$$

Damit gibt es ein  $\delta > 0$ , sodass für alle  $x \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$  die Ungleichung

$$\frac{f'(x) - f'(\hat{x})}{x - \hat{x}} < 0$$

gilt. Also gilt für alle  $x \in (\hat{x} - \delta, \hat{x}]$  die Ungleichung  $f'(x) > f'(\hat{x})$ . Da  $f'(\hat{x}) = 0$  gilt, folgt daraus  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in (\hat{x} - \delta, \hat{x}]$ . Analog sieht man, dass  $f'(x) < 0$  für alle  $x \in [\hat{x}, \hat{x} + \delta)$  gilt. Nach Satz 7.43 hat  $f$  also ein lokales Maximum bei  $\hat{x}$ .  $\square$

Um die lokalen Extrema einer Funktion zu bestimmen, sucht man also zunächst die Nullstellen der Ableitung der Funktion und betrachtet dann die zweite Ableitung, die hoffentlich darüber Auskunft gibt, ob an der Nullstelle der Ableitung ein lokales Maximum oder Minimum vorliegt. Man beachte, dass das absolute Maximum einer differenzierbaren Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  an einem Endpunkt des Definitionsbereichs vorliegen kann. In diesem Falle wissen wir nichts über die Ableitung von  $f$  an dieser Stelle. Nur wenn ein absolutes Maximum im Innern  $(a, b)$  des Definitionsbereichs vorliegt, wissen wir, dass die Ableitung  $f'$  an dieser Stelle verschwindet.

**Beispiel 7.45.** Gesucht sind die Kantenlängen des Rechtecks, welches unter allen Rechtecken mit dem gegebenen Umfang  $U$  den maximalen Flächeninhalt hat. Das

Rechteck mit den Kantenlängen  $x$  und  $y$  hat den Umfang  $2x + 2y$  und den Flächeninhalt  $A = x \cdot y$ .

Da der Umfang  $U$  fest vorgegeben ist, gilt die Gleichung

$$2x + 2y = U.$$

Damit ist  $y = \frac{1}{2}U - x$ . Nun können wir den Flächeninhalt des Rechtecks in Abhängigkeit von  $x$  als

$$A(x) = x \left( \frac{1}{2}U - x \right) = \frac{1}{2}Ux - x^2$$

ausdrücken.

Wir wollen nun dasjenige  $x$ , und damit auch  $y$ , bestimmen, für das  $A$  den maximalen Wert annimmt. Zunächst stellen wir fest, dass die Seitenlängen eines Rechtecks immer positiv sind. Außerdem kann keine Kante eines Rechtecks mit Umfang  $U$  eine Länge  $> \frac{1}{2}U$  haben. Damit brauchen wir  $A(x)$  nur auf dem Intervall  $[0, \frac{1}{2}U]$  zu studieren. Für  $x = 0$  und  $x = \frac{1}{2}U$  ergibt sich  $A(x) = 0$ . Insbesondere liegen an diesen beiden Stellen keine maximalen Werte von  $A$  vor.

Wenn die Funktion  $A$  auf dem offenen Intervall  $(0, \frac{1}{2}U)$  einen maximalen Wert annimmt, so handelt es sich um ein lokales Maximum. Damit muss die Ableitung von  $A$  an einer solchen Stelle 0 sein.

Es gilt  $A'(x) = \frac{1}{2}U - 2x$ . Die Nullstelle dieses Polynoms liegt bei  $x = \frac{1}{4}U$ . Es gilt  $A''(x) = -2 < 0$ . Damit liegt bei  $x = \frac{1}{4}U$  ein lokales Maximum vor. Dieses ist das einzige lokale Maximum von  $A(x)$ . Damit nimmt  $A$  an der Stelle  $x = \frac{1}{4}U$  tatsächlich den maximalen Wert an, und zwar den Wert

$$A \left( \frac{1}{4}U \right) = \frac{1}{16}U^2.$$

Für dieses  $x$  ergibt sich  $y = \frac{1}{2}U - \frac{1}{4}U = \frac{1}{4}U$ . Bei dem Rechteck mit dem maximalen Flächeninhalt bei vorgegebenen Umfang  $U$  handelt es sich also um ein Quadrat mit der Kantenlänge  $\frac{1}{4}U$ .

**Bemerkung 7.46.** Zum Abschluss bemerken wir noch, dass eine Funktion  $f$ , deren zweite Ableitung auf einem Intervall  $I$  existiert und positiv ist, auf diesem Intervall *konvex* ist, d.h., dass für alle  $x_1, x, x_2 \in I$  mit  $x_1 < x < x_2$  die folgende Ungleichung gilt

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

Die Ungleichung bedeutet, dass der Graph von  $f$  auf dem Intervall  $[x_1, x_2]$  unterhalb der Verbindungsgeraden zwischen den Punkten  $(x_1, f(x_1))$  und  $(x_2, f(x_2))$  verläuft.

Entsprechend ist eine Funktion  $f$ , deren zweite Ableitung auf einem Intervall  $I$  existiert und negativ ist, auf diesem Intervall *konkav*, d.h., dass für alle  $x_1, x, x_2 \in I$  mit  $x_1 < x < x_2$  die folgende Ungleichung gilt

$$f(x) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

## §7.6 DAS NEWTON-VERFAHREN

Im Folgenden werden wir wieder ausschließlich über den reellen Zahlen rechnen. Wir können Nullstellen von Polynomen zweiten Grades mit Hilfe der  $p$ - $q$ -Formel bestimmen. Für Polynome dritten und vierten Grades existieren im Prinzip ähnliche Formeln, die jedoch sehr kompliziert sind. Für Polynome noch höheren Grades existieren keine entsprechenden Formeln mehr. Für Funktionen, die keine Polynome sind, gibt es im allgemeinen keine Formeln, um die Nullstellen zu bestimmen.

Es gibt jedoch numerische Verfahren, um Nullstellen differenzierbarer Funktionen zumindest näherungsweise zu bestimmen. Eines dieser Verfahren ist das *Newton-Verfahren*, das wir hier vorstellen.

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $f''$  existiert auf ganz  $[a, b]$  und ist stetig.
- (ii) Für alle  $x \in [a, b]$  gilt  $f'(x) \neq 0$ .
- (iii)  $f(a) \cdot f(b) < 0$

Nach Bedingung (iii) ist entweder  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$  oder  $f(a) > 0$  und  $f(b) < 0$ . Da  $f$  differenzierbar ist, ist  $f$  auch stetig. Nach dem Zwischenwertsatz hat  $f$  also eine Nullstelle in dem Intervall  $[a, b]$ . Diese wollen wir näherungsweise bestimmen.

Nach Bedingung (i), ist  $f'$  auf  $[a, b]$  stetig. Wieder mit Hilfe des Zwischenwertsatzes folgt aus: nv2, dass entweder für alle  $x \in [a, b]$  die Ungleichung  $f'(x) > 0$  gilt oder es gilt  $f'(x) < 0$  für alle  $x \in [a, b]$ . Damit ist  $f$  entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Insbesondere hat  $f$  nicht mehr als eine Nullstelle in dem Intervall  $[a, b]$ .

Wir wählen nun einen Punkt  $x_0 \in [a, b]$  als erste Näherung für die Nullstelle von  $f$  in dem Intervall  $[a, b]$ . Die Geradengleichung der Tangente an den Graphen der Funktion  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  lautet

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Diese Tangente ist eine Approximation der Funktion  $f$ . Daher ist die Nullstelle der Tangente eine Näherung der Nullstelle von  $f$ . Die Nullstelle der Tangente bestimmen wir, indem wir die Gleichung

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0$$

nach  $x$  auflösen.

Es ergibt sich

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Die geometrische Vorstellung ist nun die folgende:

Die Stelle  $x_0$  ist eine, möglicherweise schlechte, Näherung der Nullstelle von  $f$ . Wir verbessern diese Näherung, indem wir  $f$  durch die Tangente im Punkte  $(x_0, f(x_0))$

annähern und deren Nullstelle bestimmen. Die Nullstelle der Tangente sollte näher an der wirklichen Nullstelle von  $f$  liegen als  $x_0$ . Dieses Verfahren können wir dann iterieren um immer bessere Näherungen der Nullstelle von  $f$  zu bekommen. Dabei kann Einiges schiefgehen. Zum Beispiel kann es passieren, dass die Nullstelle der Tangente garnicht in dem Intervall  $[a, b]$  liegt. Wenn  $x_0$  jedoch nahe genug an der Nullstelle von  $f$  liegt, so geht alles glatt. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes, den wir ohne Beweis angeben.

**Satz 7.47.** *Die Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle die Bedingungen (i)–(iii). Dann existiert ein  $\delta > 0$ , so dass Folgendes gilt:*

*Sei  $c$  die eindeutig bestimmte Nullstelle von  $f$  in dem Intervall  $[a, b]$  und sei  $x_0 \in [a, b]$  mit  $|x_0 - c| < \delta$ . Dann konvergiert die Folge  $(x_n)$  definiert durch die Vorschrift*

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

*gegen  $c$ .*

**Beispiel 7.48.** Wir wollen das Newton-Verfahren benutzen, um  $\sqrt{2}$  zu berechnen.  $\sqrt{2}$  ist die eindeutig bestimmte Nullstelle der Funktion  $f(x) = x^2 - 2$  in dem Intervall  $[1, 3]$ . Es gilt  $f'(x) = 2x$  und  $f''(x) = 2$ . Damit erfüllt  $f$  auf dem Intervall  $[1, 3]$  die Bedingungen (i)–(iii).

Die Rekursionsvorschrift, die die Folge  $(x_n)$  definiert, lautet

$$x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

Wir starten mit  $x_0 = 2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= 1.5 \\ x_2 &= 1.416666667 \\ x_3 &= 1.414215686 \\ x_4 &= 1.414213562, \end{aligned}$$

wobei die Werte auf acht Nachkommastellen gerundet sind. Die Zahl  $x_4$  ist genau der auf acht Nachkommastellen gerundete Wert von  $\sqrt{2}$ .

## §7.7 REGELN VON L'HOSPITAL

Wir kommen nochmal auf die Rechenregeln von Grenzwerten konvergenter Folgen zurück (siehe Satz 5.36). Die Bestimmung eines Grenzwertes der Form  $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{f(x)}{g(x)}$  ist manchmal schwierig, wenn Zähler und Nenner für  $x \rightarrow \hat{x}$  beide gegen 0 oder beide gegen  $\infty$  streben. Die *Regeln von L'Hospital* helfen in dieser Situation.

**Satz 7.49** (L'Hospitalschen Regeln). *Seien  $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $(a, b)$ , wobei  $a = -\infty$  oder  $b = \infty$  erlaubt ist, differenzierbar auf  $(a, b)$  für alle  $x \in (a, b)$  sei  $g'(x) \neq 0$ . Falls*

*gilt*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty,$$

dann ist

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

wenn der rechte Grenzwert existiert oder bestimmt gegen  $\infty$  oder  $-\infty$  divergiert.

Die analoge Aussage gilt auch für Grenzwerte  $x \rightarrow b$ .

**Beispiel 7.50.** (a) Wir berechnen  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{3x} \right)$ . Für  $x \rightarrow 0$  streben Zähler und Nenner des Bruches gegen 0. Für  $x \neq 0$  gilt  $3x \neq 0$ . Außerdem sind  $e^x - 1$  und  $3x$  differenzierbar. Damit gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{3} = \frac{1}{3}.$$

(b) Wir bestimmen einen Grenzwert, den wir bereits auf andere Weise berechnen können. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

(c) Oft ist es nötig, die L'Hospitalischen Regeln mehrfach anzuwenden. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Dieses Argument funktioniert für jedes Polynom  $p(x)$  anstelle von  $x^2 - x + 1$ , wobei man solange ableiten muss, bis  $p^{(n)}(x)$  konstant ist. Der Grenzwert ist in diesem Fall  $\infty$  oder  $-\infty$ . Wir sagen, dass  $e^x$  *schneller* als jedes Polynom *wächst*.

(d) Wir wollen den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$  berechnen, wobei wir  $x^x$  zunächst nur auf dem Intervall  $(0, \infty)$  betrachten. Für  $x = 0$  können wir  $x^x = 1$  setzen, was aber für den Funktionsgrenzwert unerheblich ist. Wir werden jedoch sehen, dass 1 der „korrekte“ Wert für  $x^x$  an der Stelle  $x = 0$  ist.

Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x},$$

falls der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$  existiert. Der letztgenannte Grenzwert ist von der Form  $0 \cdot \infty$  bzw. in diesem Falle  $0 \cdot (-\infty)$ .

Wenn wir anstelle von  $x \ln x$  jedoch  $\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$  schreiben, haben wir den Ausdruck in eine Form gebracht, die von den L'Hospitalischen Regeln abgedeckt wird. Es gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ . Man beachte, dass  $\ln x$  nur auf dem Intervall  $(0, \infty)$  definiert ist. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0.$$

Damit ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x} = e^0 = 1.$$



## Integralrechnung

In der Integralrechnung geht es um die folgenden beiden Grundfragen:

**Flächeninhaltsproblem:** Wie bestimmt man den Inhalt einer Fläche, die durch Kurven berandet ist?

**Stammfunktionsproblem:** Wie findet man zu einer gegebenen Funktion  $f$  eine Stammfunktion  $F$  mit der Eigenschaft  $F' = f$ ?

Wir werden sehen, dass es sich bei diesen beiden Problemen im Wesentlichen um dasselbe Problem handelt.

### §8.1 BESTIMMTE INTEGRALE

Wir betrachten reellwertige Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Üblicherweise wird  $f$  stetig sein und in diesem Fall ist der Bildbereich  $f([a, b])$  aufgrund von Satz 7.38 auch beschränkt. Die meisten Resultate gelten auch in einem etwas allgemeineren Kontext, nämlich für Funktionen mit beschränktem Bildbereich und höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen. Wir wollen nun die Fläche berechnen, die durch die  $x$ -Achse, die Geraden  $x = a$  und  $x = b$  und durch den Graphen der Funktion  $f$  eingeschlossen ist. Dabei werden Flächenstücke unterhalb der  $x$ -Achse mit einem negativen Vorzeichen berücksichtigt und Flächenstücke oberhalb der  $x$ -Achse mit positivem Vorzeichen. Wir nennen diese Fläche die *Fläche unter der Kurve*  $f$ .

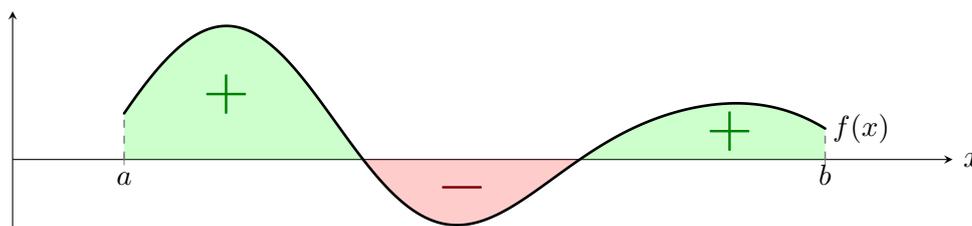


ABBILDUNG 8.1. Fläche unter einer Kurve mit positivem und negativem Anteil

Eine Methode, diese Fläche näherungsweise zu berechnen, ist es, sie durch eine Vereinigung von Rechtecken zu approximieren. Dazu wählen wir zunächst  $n \in \mathbb{N}$  und unterteilen  $[a, b]$  in  $n$  gleichgroße Intervalle. Die Endpunkte dieser Intervalle sind

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = a + 2 \cdot \frac{b-a}{n}, \quad \dots, \quad x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \quad \dots, \quad x_n = b.$$

Eine solche Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$  nennen wir eine *äquidistante Zerlegung*.

Für jedes  $i \in [n]$  sei

$$M_i := \max \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{und} \quad m_i := \min \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Da  $f([a, b])$  beschränkt ist und  $f$  höchstens an endlich vielen Stellen nicht stetig ist, existieren die Maxima und Minima.

Nun seien

$$U_n := \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} m_i \quad \text{und} \quad O_n := \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} M_i$$

die  $n$ -te Unter- und Obersumme von  $f$ . Es ist klar, dass  $U_n$  eine untere Schranke für die Fläche unter der Kurve ist, während  $O_n$  eine obere Schranke für die Fläche unter der Kurve ist und somit gilt für alle  $n, n' \in \mathbb{N}$

$$U_{n'} \leq O_n \tag{8.1}$$

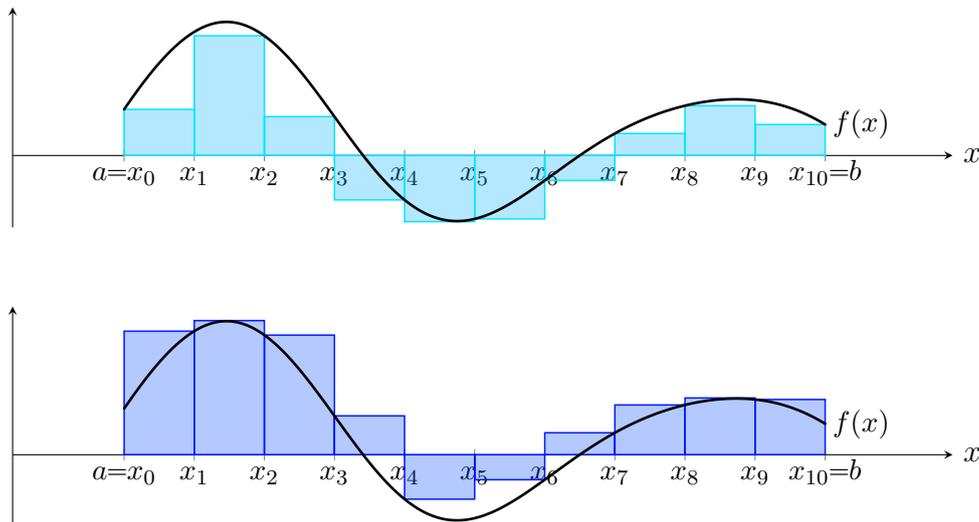


ABBILDUNG 8.2. 10-te Unter- und Obersumme  $U_{10}$  und  $O_{10}$  von  $f$

Der folgende Satz impliziert, dass  $O_n$  und  $U_n$  zu dem gleichen Wert konvergieren, wenn  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist.

**Satz 8.1.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion, die höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt. Dann konvergieren die beiden Folgen  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen denselben Grenzwert.

Dieser Satz motiviert die folgende Definition.

**Definition 8.2.** Eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt integrierbar, falls die Folgen  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen denselben Grenzwert konvergieren und wir schreiben dafür

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n.$$

Wir nennen  $\int_a^b f(x) dx$  das bestimmte Integral von  $f$  über  $[a, b]$ . Die Funktion  $f$  ist in diesem Zusammenhang der Integrand,  $x$  ist die Integrationsvariable, die durch  $dx$  angezeigt wird und  $a$  und  $b$  sind die Integrationsgrenzen.

Das bestimmte Integral  $\int_a^b f(x) dx$  ist der Flächeninhalt der Fläche unter der Kurve  $f$  und wir verständigen uns auf die folgenden Konventionen

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

BEWEIS VON SATZ 8.1. Wir beweisen Satz 8.1 zuerst für stetige Funktionen und skizzieren danach, wie man den allgemeinen Fall beweisen kann.

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  als stetig vorausgesetzt. Wir zeigen, dass  $f$  dann *gleichmäßig stetig* ist, d. h. für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , sodass für alle  $\hat{x} \in [a, b]$  gilt

$$|f(x) - f(\hat{x})| < \varepsilon, \quad \text{für alle } x \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta). \quad (8.2)$$

Im Unterschied zum  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium der Stetigkeit (siehe Satz 6.10) gibt es für jedes  $\varepsilon$  ein  $\delta$ , welches unabhängig von der Stelle  $\hat{x} \in [a, b]$  ist und „gleichmäßig“ für alle gilt.

Angenommen  $f$  ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  zwei Punkte  $\hat{x}_n$  und  $x_n$  mit Abstand kleiner  $1/n$  existieren und  $|f(x_n) - f(\hat{x}_n)| \geq \varepsilon$ . Die Folgenglieder der Folge  $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  liegen in  $[a, b]$ , d. h. die Folge ist beschränkt und nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 5.34) gibt es eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Sei  $x \in [a, b]$  der Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ . Wegen  $|x_{n_k} - \hat{x}_{n_k}| < 1/n_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  ist auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{x}_{n_k} = x$  und mit der Stetigkeit vom Betrag und von  $f$  folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(\hat{x}_{n_k})| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) - \lim_{k \rightarrow \infty} f(\hat{x}_{n_k}) \right| = |f(x) - f(x)| = 0.$$

Dies widerspricht aber der Wahl der Folgen  $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $|f(x_n) - f(\hat{x}_n)| \geq \varepsilon$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , was  $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(\hat{x}_{n_k})| \geq \varepsilon$  (bzw. Divergenz von  $|f(x_{n_k}) - f(\hat{x}_{n_k})|$ ) nach sich ziehen würde.

Nach dieser wichtigen Vorüberlegung zeigen wir nun, dass es für jedes  $\zeta > 0$  ein  $n_0$  gibt, sodass für alle  $n > n_0$

$$0 \leq O_n - U_n < \zeta \quad (8.3)$$

gilt. Damit folgt insbesondere  $\lim_{n \rightarrow \infty} (O_n - U_n) = 0$ , allerdings ist damit dann noch nicht klar, ob die Folgen einzeln konvergieren.

Für den Beweis von (8.3) wenden wir die gleichmäßige Stetigkeit mit  $\varepsilon = \frac{\zeta}{b-a}$  an und erhalten ein  $\delta > 0$ , sodass (8.2) gilt. Für  $n > n_0 := \lceil (b-a)/\delta \rceil$  haben dann zwei Punkte einer äquidistanten Zerlegung mit  $x_0, x_1, \dots, x_n$  einen Abstand  $\frac{b-a}{n} < \delta$  und folglich gilt wegen der gleichmäßigen Stetigkeit

$$0 \leq M_i - m_i < \varepsilon = \frac{\zeta}{b-a}.$$

Durch (8.1) und die Definition von  $U_n$  und  $O_n$ , ergibt sich dann (8.3)

$$0 \leq O_n - U_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) < \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\zeta}{b-a} = \zeta.$$

Wie bereits erwähnt, bleibt noch zu zeigen, dass auch die Folgen  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren und nicht nur die Folge der Differenzen. Da aber die Folge der Differenzen konvergiert, ist es hinreichend, die Konvergenz einer der beiden Folgen zu zeigen und wir weisen nach, dass  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge (siehe Satz 5.35) ist. Sei dafür  $\zeta > 0$  beliebig. Wir wählen  $n_0$  groß genug, sodass (8.3) gilt und betrachten  $n, n' > n_0$ . O. B. d. A. sei  $U_{n'} \geq U_n$  und dann gilt

$$0 \leq U_{n'} - U_n \stackrel{(8.1)}{\leq} O_n - U_n \stackrel{(8.3)}{<} \zeta.$$

Somit ist  $|U_n - U_{n'}| < \zeta$  und  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge, die konvergiert.

Für den allgemeinen Fall, dass  $f$  nur beschränkt ist und möglicherweise endlich viele Unstetigkeitsstellen hat, argumentiert man ganz ähnlich. Angenommen, für ein  $\ell \in \mathbb{N}$  ist  $U = \{u_1, \dots, u_\ell\} \subseteq [a, b]$  die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f$ , und seien  $m^*$  und  $M^*$  eine obere und eine untere Schranke des Bildbereiches  $f([a, b])$ , für den Nachweis von (8.3) können wir uns nun nicht auf die gleichmäßige Stetigkeit zurückziehen. Stattdessen werden wir eine so feine äquidistante Zerlegung  $x_0, x_1, \dots, x_n$  von  $[a, b]$  wählen, sodass die Intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ , die eine Unstetigkeitsstelle enthalten, nur geringen Einfluß auf die  $n$ -te Ober- und Untersumme haben. Dies erreicht man z. B. dadurch, dass man

$$n = \left\lceil \frac{2(M^* - m^*) \cdot \ell \cdot (b-a)}{\zeta} \right\rceil.$$

Tatsächlich gilt dann für die Differenz  $D$  der Ober- und Untersumme eingeschränkt auf die Intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  die eine Unstetigkeitsstelle enthalten

$$D = \frac{b-a}{n} \sum_{i: U \cap [x_{i-1}, x_i] \neq \emptyset} \left( \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) \leq \frac{b-a}{n} \cdot \ell \cdot (M^* - m^*) \leq \frac{\zeta}{2}.$$

Für alle anderen Intervalle, also solche, die keine Unstetigkeitsstelle aus  $U$  enthalten, kann man wieder mit gleichmäßiger Stetigkeit argumentieren. Für hinreichend großes  $n$  kann, wie im Beweis von (8.3), für die Differenz der  $n$ -ten Ober- und Untersumme eingeschränkt auf diesen Intervallen, dann auch eine Schranke von  $\zeta/2$  etabliert werden. Zusammengefaßt ergibt sich so auch die Abschätzung (8.3) für jedes  $\zeta > 0$  für hinreichend großes  $n$ . Der Rest vom Beweis ist dann analog, da er nicht mehr die Stetigkeit, sondern nur noch (8.3), verwendet.  $\square$

**Bemerkung 8.3.** In der Literatur betrachtet man oftmals nicht nur äquidistante Zerlegungen von  $[a, b]$ , sondern allgemeiner auch Zerlegungen, bei denen die Teilintervalle unterschiedliche Längen haben. Für eine Zerlegung  $\mathcal{Z}$  und eine beschränkte Funktion

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  kann man die Obersumme  $O(\mathcal{Z})$  und die Untersumme  $U(\mathcal{Z})$  wie oben definieren. Man sagt dann, dass  $f$  integrierbar ist, wenn

$$\sup \{U(\mathcal{Z}): \mathcal{Z}\} = \inf \{O(\mathcal{Z}): \mathcal{Z}\}$$

gilt, wobei das Supremum und das Infimum über alle Zerlegungen  $\mathcal{Z}$  von  $[a, b]$  genommen wird.

**Beispiel 8.4.** Wir bestimmen die Fläche, die von der  $x$ -Achse, der Funktion  $f(x) = x^2$  und der Geraden  $x = 1$  eingeschlossen wird. Da  $f(0) = 0$  gilt, betrachten wir die Funktion  $f$  also nur auf dem Intervall  $[0, 1]$ . Auf diesem Intervall ist  $f$  streng monoton wachsend. Damit wird der maximale Wert von  $f$  auf einem abgeschlossenen Intervall  $[c, d] \subseteq [a, b]$  am rechten Rand des Intervalls angenommen, also an der Stelle  $d$ . Der minimale Funktionswert wird am linken Endpunkt  $c$  des Intervalls angenommen. In dem Beweis brauchen wir die Formel

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

die man direkt mit vollständiger Induktion überprüfen kann. Damit gilt

$$\begin{aligned} O_n &= \sum_{i=1}^n \frac{1-0}{n} \cdot f\left(0 + \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Die Fläche unter der Kurve hat also den Flächeninhalt  $\frac{1}{3}$ .

**Beispiel 8.5.** Ein bekanntes Beispiel einer beschränkten, nicht-integrierbaren Funktion mit unendlich vielen Unstetigkeitsstellen ist die *Indikatorfunktion*  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  der rationalen Zahlen in  $[0, 1]$  definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Da jedes Intervall positiver Länge sowohl eine rationale als auch eine irrationale Zahl enthält, ist  $U_n = 0$  und  $O_n = 1$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Die Folgen konvergieren also, aber die Grenzwerte  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = 1$  sind unterschiedlich.

Für bestimmte Integrale gelten folgende Rechenregeln, die die Berechnung von Integralen und den Umgang mit Integralen erleichtern.

**Satz 8.6.** Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

(i) Falls  $f$  und  $g$  integrierbar sind, dann ist die Funktion  $f+g$  mit  $x \mapsto f(x)+g(x)$  integrierbar auf  $[a, b]$  und es gilt

$$\int_a^b (f+g)(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

(ii) Falls  $f$  integrierbar ist und  $c \in \mathbb{R}$ , dann ist die Funktion  $c \cdot f$  mit  $x \mapsto c \cdot f(x)$  integrierbar auf  $[a, b]$  und es gilt

$$\int_a^b (c \cdot f)(x) \, dx = c \cdot \int_a^b f(x) \, dx.$$

(iii) Falls  $f$  und  $g$  integrierbar sind und  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ , dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

(iv) Falls  $f$  integrierbar ist und es  $m, M \in \mathbb{R}$  mit  $m \leq f(x) \leq M$  für alle  $x \in [a, b]$  gibt, dann gilt

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M \cdot (b-a).$$

(v) Für jedes  $\gamma \in [a, b]$  ist die Funktion  $f$  auf  $[a, b]$  integrierbar genau dann, wenn sie auf  $[a, \gamma]$  und auf  $[\gamma, b]$  integrierbar ist und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^\gamma f(x) \, dx + \int_\gamma^b f(x) \, dx.$$

(vi) Falls  $f$  integrierbar ist, dann ist auch die Funktion  $x \mapsto |f(x)|$  integrierbar und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

(vii) Falls  $f$  und  $g$  integrierbar sind, dann gilt

$$\left| \int_a^b (f+g)(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx + \int_a^b |g(x)| \, dx.$$

BEWEIS. Die ersten vier Rechenregeln ergeben sich leicht aus den Rechenregeln konvergenter Folgen. Seien  $(U_n^f)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(U_n^g)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(O_n^f)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(O_n^g)_{n \in \mathbb{N}}$  die konvergenten Folgen der Unter- und Obersummen von  $f$  und  $g$  auf  $[a, b]$ . Dann sind  $(U_n^f + U_n^g)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(O_n^f + O_n^g)_{n \in \mathbb{N}}$  Unter- und Obersummen von  $f+g$  und auch diese Folgen sind konvergent. Schließlich gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (U_n^f + U_n^g) &= \lim_{n \rightarrow \infty} U_n^f + \lim_{n \rightarrow \infty} U_n^g \\ &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} O_n^f + \lim_{n \rightarrow \infty} O_n^g = \lim_{n \rightarrow \infty} (O_n^f + O_n^g) \end{aligned}$$

und (i) folgt.

Ebenso ergibt sich Teil (ii) aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot U_n^f) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} U_n^f = c \cdot \int_a^b f(x) dx = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} O_n^f = \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot O_n^f),$$

da  $c \cdot U_n^f$  und  $c \cdot O_n^f$  die  $n$ -te Unter- und Obersumme der Funktion  $c \cdot f$  sind.

Auch die Monotonieregel in (iii) folgt direkt aus der Abschätzung

$$O_n^f \leq O_n^g$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ , da  $f(x) \leq g(x)$  und somit auch  $M_i^f \leq M_i^g$  für die Maxima von  $f$  und  $g$  in den Intervallen der äquidistanten Unterteilung gilt. Es folgt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n^f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} O_n^g = \int_a^b g(x) dx.$$

Teil (iv) folgt mit zwei Anwendungen von (iii). Zuerst verwenden wir die konstante Funktion  $h_m: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto m$ . Da  $\int_a^b h_m(x) dx = m \cdot (a - b)$  und nach Voraussetzung  $m = h_m(x) \leq f(x)$  gilt, folgt die erste Ungleichung durch (iv). Genauso ergibt sich die zweite, da  $f(x) \leq h_M(x) = M$  für die konstante Funktion  $h_M: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto M$  gilt.

Für den Beweis von Aussage (v), ist es praktischer, auf die Definition von integrierbar aus Bemerkung 8.3 zurückzugreifen und wir überlassen die Details zur Übung.

Als nächstes beweisen wir die *Dreiecksungleichung* aus Teil (vi). Wir betrachten die beiden Hilfsfunktionen  $f_+, f_-: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad f_-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und zeigen, dass diese integrierbar sind. Die Integrierbarkeit von  $|f(x)|$  folgt dann aus Teil (i), da  $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$  und die Monotonie ergibt sich durch  $f(x) \leq |f(x)|$  aus (iii).

Seien  $U_n^+$  und  $O_n^+$  die  $n$ -te Unter- und Obersumme von  $f_+$ . Aus der Definition von  $f_+$  folgt, dass der Abstand zwischen Maximum  $M_i^+$  und Minimum  $m_i^+$  in einem Intervall  $[x_{i-1}, x_i]$  einer Unterteilung sich nicht vergrößern kann. Entweder er ist gleich geblieben, falls  $f$  in dem Intervall nicht negativ war, oder  $M_i^+ = M_i$  und  $m_i^+ = 0 \geq m_i$ , falls das Minimum von  $f$  kleiner 0 und das Maximum  $\geq 0$  war, oder  $M_i^+ = m_i^+ = 0$ , falls das Maximum von  $f$  kleiner gleich 0 war. Somit gilt

$$O_n^+ - U_n^+ \leq O_n^f - U_n^f$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  und aus der Integrierbarkeit von  $f$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (O_n^+ - U_n^+) = 0$ . Des Weiteren kann man zeigen, dass die Folgen  $(U_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(O_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$  auch konvergieren und wir lassen dies zur Übung. Mit den gleichen Überlegungen zeigt man auch die Integrierbarkeit von  $f_-$ .

Die abschließende Ungleichung  $(vi)$  ergibt sich aus der Dreiecksungleichung des Betrages (siehe Satz 5.15) zusammen mit den Rechenregeln aus Teil  $(i)$  und  $(vi)$ . Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b (f+g)(x) \, dx \right| &\stackrel{(i)}{=} \left| \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| + \left| \int_a^b g(x) \, dx \right| \stackrel{(vi)}{\leq} \int_a^b |f(x)| \, dx + \int_a^b |g(x)| \, dx. \end{aligned}$$

□

## §8.2 HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

Für eine integrierbare Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a < b$  definieren wir

$$\mu := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

als den *Durchschnittswert/Mittelwert von  $f$  auf dem Intervall  $[a, b]$* . Die Zahl  $\mu$  ist die Höhe eines Rechtecks der Breite  $b-a$  mit demselben Flächeninhalt wie die Fläche unter der Kurve  $f$ . Der folgende Satz besagt, dass eine stetige Funktion auf dem Intervall  $[a, b]$  ihren Mittelwert annimmt.

**Satz 8.7** (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es ein  $\hat{x} \in [a, b]$  mit*

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\hat{x}) \cdot (b-a).$$

**BEWEIS.** Da  $f$  stetig auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  ist, gibt es nach Satz 7.38 globale Extrema  $m^*$  und  $M^*$  und mit dem Zwischenwertsatz (Satz 6.12) folgt

$$f([a, b]) = [m^*, M^*]. \quad (8.4)$$

Offensichtlich folgt mit Rechenregel  $(iv)$  aus Satz 8.6

$$m^* \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M^* \cdot (b-a).$$

Folglich existiert ein  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \in [m^*, M^*]$ , sodass

$$\int_a^b f(x) \, dx = \mu \cdot (b-a)$$

und (8.4) garantiert ein  $\hat{x} \in [a, b]$  mit  $f(\hat{x}) = \mu$ . □

Die Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei integrierbar. Nach Satz 8.6  $(v)$  ist  $f$  dann auch auf jedem Intervall der Form  $[a, x]$  mit  $x \in [a, b]$  integrierbar. Damit können wir eine Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Vorschrift

$$F(x) := \int_a^x f(t) \, dt$$

definieren. Der Wert  $F(x)$  ist also die Fläche unter der Kurve  $f$  auf dem Intervall  $[a, x]$ .

**Satz 8.8** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist die Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch*

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

*differenzierbar und für alle  $x \in [a, b]$  gilt  $F'(x) = f(x)$ .*

BEWEIS. Seien  $x \in [a, b]$  beliebig und  $h > 0$ . Der entsprechende Differenzenquotient von  $F$  lautet

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein  $\hat{x}_h \in [x, x+h]$  mit

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = f(\hat{x}_h) \cdot h.$$

Also ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} (f(\hat{x}_h) \cdot h) = f(\hat{x}_h).$$

Dieses gleiche Argument garantiert auch für  $h < 0$  ein  $\hat{x}_h \in [x-h, x]$ , sodass  $\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = f(\hat{x}_h)$ . Somit folgt mit der Stetigkeit von  $f$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\hat{x}_h) = f\left(\lim_{h \rightarrow 0} \hat{x}_h\right).$$

Da  $\hat{x}_h \in [x, x+h]$  (bzw.  $\hat{x}_h \in [x-h, x]$ ) muss gelten  $\lim_{h \rightarrow 0} \hat{x}_h = x$  und folglich

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

□

**Definition 8.9.** *Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Ist  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x \in I$ , so nennt man  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ .*

Der Hauptsatz besagt also, dass die Funktion  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  eine Stammfunktion von  $f$  ist. Wir stellen zunächst fest, dass sich zwei Stammfunktionen einer gegebenen Funktion höchstens um eine Konstante unterscheiden.

**Satz 8.10.** *Sind  $F_1$  und  $F_2$  im Intervall  $[a, b]$  Stammfunktionen von  $f$ , so unterscheiden sich  $F_1$  und  $F_2$  nur um eine additive Konstante. D.h., es gibt eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ , sodass für alle  $x \in [a, b]$  gilt*

$$F_1(x) = F_2(x) + c.$$

BEWEIS. Da  $F_1$  und  $F_2$  differenzierbar sind, ist auch  $F_1 - F_2$  differenzierbar und es gilt für alle  $x \in [a, b]$ :

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Die Ableitung der Funktion  $F_1 - F_2$  ist also auf dem gesamten Intervall  $[a, b]$  gleich 0. Damit ist  $F_1 - F_2$  nach Korollar 7.41 eine konstante Funktion. Sei also  $c \in \mathbb{R}$ , sodass für alle  $x \in [a, b]$  gilt:  $(F_1 - F_2)(x) = c$ . Damit gilt für alle  $x \in [a, b]$  die Gleichung

$$F_1(x) = F_2(x) + c.$$

□

Der folgende Satz ist eine Konsequenz des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und zeigt, wie man bestimmte Integrale berechnen kann, wenn man die Stammfunktion des Integranden kennt.

**Satz 8.11.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

BEWEIS. Nach dem Fundamentalsatz ist  $\int_a^x f(t) dt$  eine Stammfunktion von  $f$ . Nach Satz 8.10 existiert eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ , sodass für alle  $x \in [a, b]$  gilt:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c$$

Es folgt

$$F(b) - F(a) = \left( \int_a^b f(t) dt + c \right) - \left( \int_a^a f(t) dt + c \right) = \int_a^b f(t) dt + c - 0 - c = \int_a^b f(t) dt.$$

□

### §8.3 STAMMFUNKTIONEN UND BERECHNUNG VON INTEGRALEN

Satz 8.11 gibt uns eine Methode, ein bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

zu berechnen. Man muss nur eine Stammfunktion  $F$  von  $f$  finden und dann  $F(b) - F(a)$  berechnen. Im Folgenden werden wir uns daher mit dem Problem befassen, zu einer gegebenen Funktion eine Stammfunktion zu bestimmen. Wir müssen also das Ableiten umkehren. Wir führen folgende Schreibweise ein: Ist  $F$  eine Stammfunktion der stetigen Funktion  $f$ , so schreiben wir  $F(x)|_a^b$  für  $F(b) - F(a)$ , d. h.

$$F(x)|_a^b := F(b) - F(a).$$

Anstelle von  $F(x)|_a^b$  ist auch  $[F(x)]_a^b$  gebräuchlich.

Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , so bezeichnet man  $F$  als *unbestimmtes Integral* von  $f$  und schreibt für  $F$  auch  $\int f(x) dx$ . Da die Stammfunktion nicht eindeutig ist, sollte

$$F = \int f(x) dx$$

nicht als Gleichung aufgefasst werden, sondern als Abkürzung für die Aussage „ $F$  ist eine Stammfunktion von  $f$ “.

**Beispiel 8.12.** (a) In Beispiel 8.4 hatten wir die Fläche unter der Kurve  $f(x) = x^2$  auf dem Intervall  $[0, 1]$  berechnet, also  $\int_0^1 x^2 dx$  bestimmt. Wir berechnen dieses bestimmte Integral noch einmal durch Auffinden der Stammfunktion von  $x^2$ . Wir wissen, dass für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die Ableitungsregel  $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$  gilt. So ist zum Beispiel  $(x^3)' = 3x^2$ . Damit gilt  $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$ .

Sei also  $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ . Dann ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f(x) = x^2$ . Also gilt

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

(b) Wir berechnen die Fläche unter der Kurve  $\sin(x)$  im Intervall  $[0, \pi]$ . Wir wissen, dass  $\cos'(x) = -\sin(x)$  gilt. Also ist  $-\cos(x)$  die Stammfunktion von  $\sin(x)$ . und es gilt

$$\int_0^\pi \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2.$$

Die folgende Tabelle gibt die Stammfunktionen einiger elementarer reeller Funktionen an. Von der Richtigkeit der Tabelle kann man sich durch Ableiten der Stammfunktionen überzeugen.

Funktion $f$	Stammfunktion $F$
$x^r$ ( $r \neq -1$ )	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$e^x$	$e^x$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$

Da das Integrieren die Umkehrung des Ableitens ist, kann man jede Ableitungsregel rückwärts auch als Integrationsregel lesen. Damit ergibt sich sofort der folgende Satz.

**Satz 8.13.** Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbare Funktionen mit Stammfunktionen  $F, G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und sei  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

(i)  $(F + G)(x)$  ist eine Stammfunktion von  $(f + g)(x)$  bzw.

$$\int (f + g)(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

(ii)  $(c \cdot F)(x)$  ist eine Stammfunktion von  $(c \cdot f)(x)$  bzw.

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

**8.3.1. Partielle Integration.** Auch die Produktregel lässt sich als Integrationsregel auffassen. Das führt auf die *partielle Integration*.

**Satz 8.14** (Partielle Integration). *Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit stetigen Ableitungen  $f'$  und  $g'$ . Dann gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx.$$

BEWEIS. Nach der Produktregel (siehe Satz 7.5) gilt

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

und mit Satz 8.11 folgt

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) \, dx = f(x)g(x) \Big|_a^b.$$

Umstellen der Gleichung liefert die Behauptung.  $\square$

Satz 8.14 besagt also, dass sich eine Stammfunktion von  $f'g$  als Differenz von  $fg$  und einer Stammfunktion von  $fg'$  darstellen lässt, d. h.

$$\int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \, dx.$$

**Beispiel 8.15.** (a) Wir wollen

$$\int_a^b x \cdot \cos(x) \, dx$$

mit Hilfe partieller Integration berechnen. Dazu interpretieren wir  $x \cdot \cos(x)$  als  $f'g$ , wobei allerdings zunächst unklar ist, ob wir  $x$  oder  $\cos(x)$  als  $f'$  interpretieren wollen. Wenn wir  $x$  als  $f'$  interpretieren, müssen wir im Folgenden  $x$  integrieren, was den Ausdruck komplizierter macht. Der Ausdruck  $\cos(x)$  wird allerdings beim Integrieren nicht komplizierter, während  $x$  beim Ableiten einfacher wird. Daher setzen wir  $f'(x) = \cos(x)$  und  $g(x) = x$  an.

Für die Funktion  $f$  können wir dann  $\sin(x)$  wählen. Außerdem ergibt sich

$$g'(x) = 1.$$

Nach dem Satz über die partielle Integration ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)g(x) \, dx &= f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx \\ &= \sin(x) \cdot x \Big|_a^b - \int_a^b \sin(x) \cdot 1 \, dx \\ &= x \sin(x) \Big|_a^b - (-\cos(x)) \Big|_a^b \\ &= (x \sin(x) + \cos(x)) \Big|_a^b. \end{aligned}$$

Also ist  $x \sin(x) + \cos(x)$  eine Stammfunktion von  $x \cdot \cos(x)$  und wir schreiben

$$\int x \cos(x) \, dx = x \sin(x) + \cos(x).$$

- (b) Bei der partiellen Integration ist es nicht immer offensichtlich, wie man den Integranden in der Form  $f'g$  schreiben sollte. Wenn man zum Beispiel  $\int \ln(x) \, dx$  berechnen möchte, erweist es sich als günstig,  $f'(x) = 1$  und  $g(x) = \ln(x)$  anzusetzen. Dann kann man  $f(x) = x$  wählen und es ergibt sich  $g'(x) = \frac{1}{x}$ . Nach Satz 8.14 ist dann

$$\int \ln(x) \, dx = \int 1 \cdot \ln(x) \, dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln(x) - x.$$

**8.3.2. Substitutionsregel.** Neben der Produktregel erinnern wir uns nun an die Kettenregel

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

und betrachten zum Beispiel die Funktion  $2xe^{x^2}$ . Wir sehen sofort, dass  $2x$  die Ableitung von  $x^2$  ist. Damit gilt

$$2xe^{x^2} = e^{x^2} \cdot 2x = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

mit  $f(x) = e^x$  und  $g(x) = x^2$ . Nach der Kettenregel ist  $f(g(x)) = e^{x^2}$  eine Stammfunktion von  $f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2xe^{x^2}$ , d. h.

$$\int 2xe^{x^2} \, dx = e^{x^2}.$$

Wir berechnen nun das Integral der Funktion  $\cos(3x+1)$ . Dazu wollen wir  $\cos(3x+1)$  in der Form  $f'(g(x)) \cdot g'(x)$  schreiben. Es ist naheliegend,  $g(x) = 3x+1$  anzusetzen. Dann ist  $g'(x) = 3$ , also

$$\cos(3x+1) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(3x+1) \cdot 3.$$

Es folgt

$$f'(3x+1) = \frac{1}{3} \cos(3x+1)$$

und damit  $f'(x) = \frac{1}{3} \cos(x)$ . Das liefert  $f(x) = \frac{1}{3} \sin(x)$ . Damit ist

$$\begin{aligned} \int \cos(3x+1) \, dx &= \int \frac{1}{3} \cos(3x+1) \cdot 3 \, dx \\ &= \int f'(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = f(g(x)) = \frac{1}{3} \sin(3x+1). \end{aligned}$$

Die beiden letzten Beispiele sind Beispiele für die *Integration durch Substitution*. Wir betrachten diese Integrationsmethode zunächst für bestimmte Integrale.

**Satz 8.16** (Substitutionsregel). *Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall, sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit einer stetigen Ableitung und  $g([a, b]) \subseteq I$ . Dann ist*

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du.$$

BEWEIS. Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Nach der Kettenregel gilt

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Durch zweimalige Anwendung von Satz 8.11 erhalten wir nun die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du.$$

□

Für unbestimmte Integrale zeigt Satz 8.16 also, dass  $(f \circ g)(x)$  eine Stammfunktion von  $f'(g(x)) \cdot g'(x)$  ist, bzw.

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = (f \circ g)(x).$$

Wir sehen, dass wir in diesem Satz einmal eine Funktion in der Variablen  $u$  und einmal eine Funktion in der Variablen  $x$  integrieren. Der Zusammenhang zwischen den Variablen  $u$  und  $x$  ist, dass wir in dem Integral auf der rechten Seite  $u$  schreiben, während in dem Integral auf der linken Seite  $g(x)$  auftritt. Wir sagen, dass wir  $u$  für  $g(x)$  substituieren.

Für die praktische Anwendung der Substitutionsregel stellen wir uns vor, dass wir  $u := g(x)$  setzen und dann berechnen, wie sich  $du$  mit Hilfe von  $dx$  ausdrücken lässt, wobei wir so tun, als könnten wir mit  $du$  und  $dx$  rechnen. Wenn wir uns  $u$  als Funktion vorstellen, die von  $x$  abhängt, dann ist

$$g'(x) = \frac{du}{dx}$$

(siehe Definition 7.1). Wenn wir uns für einen Moment erlauben, mit den Symbolen  $dx$  und  $du$  „zu rechnen“, dann erhalten wir  $du = g'(x) \, dx$  oder auch  $dx = \frac{du}{g'(x)}$ , falls  $g'(x)$  für alle relevanten  $x$  von 0 verschieden ist. Tatsächlich führen diese „Umformungsregeln“ bei der Substitution zu den richtigen Ergebnissen.

**Beispiel 8.17.** (a) Wir berechnen

$$\int \sin(2x + 1) \, dx.$$

Es ist naheliegend mit  $u := 2x + 1$  zu substituieren. Dann ist

$$\frac{du}{dx} = (2x + 1)' = 2,$$

also  $dx = \frac{1}{2} du$ . Damit gilt

$$\int \sin(2x + 1) \, dx = \int \sin(u) \cdot \frac{1}{2} \, du = \frac{1}{2}(-\cos(u)) = -\frac{1}{2} \cos(2x + 1).$$

Da wir die Stammfunktion von  $\sin(2x + 1)$  ausrechnen wollen, müssen wir am Schluss an Stelle von  $u$  wieder  $2x + 1$  einsetzen.

Unser Ergebnis können wir durch die Probe

$$\left(-\frac{1}{2} \cos(2x + 1)\right)' = \frac{1}{2} \sin(2x + 1) \cdot 2 = \sin(2x + 1)$$

überprüfen.

(b) Wir berechnen das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx.$$

Dazu substituieren wir  $u := g(x) = 1 + x^2$ . Es ergibt sich  $\frac{du}{dx} = 2x$ , also  $du = 2x dx$  oder  $\frac{1}{2} du = x dx$ . Einsetzen in das Integral liefert

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \int_{g(0)}^{g(1)} \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{-1}{2 \cdot u} \Big|_1^2 = \frac{-1}{4} - \frac{-1}{2} = \frac{1}{4}.$$

(c) Eine klassische Aufgabe zur Integration durch Substitution ist die Berechnung der Fläche eines Kreises. Der Einfachheit halber betrachten wir nur den Einheitskreis. Bekanntlich besteht der Einheitskreis genau aus den Punkten  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Löst man diese Gleichung nach  $y$  auf, so erhält man

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Die obere Hälfte des Einheitskreises ist also genau der Graph der Funktion  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , die auf dem Intervall  $[-1, 1]$  definiert ist. Damit ist die Fläche des Kreises, also eigentlich die vom Einheitskreis eingeschlossene Fläche, genau das doppelte der Fläche unter der Kurve  $f$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$ .

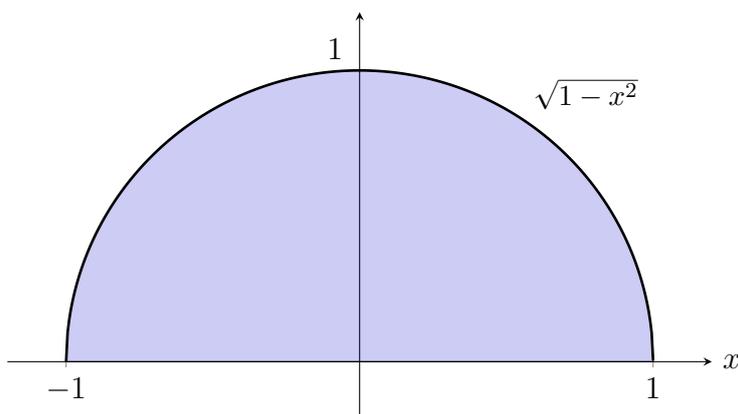


ABBILDUNG 8.3. Fläche des Halbkreises mit Radius 1

Wir müssen also das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

berechnen. Da  $\sin^2(u) + \cos^2(u) = 1$  vereinfacht sich der Ausdruck  $\sqrt{1-x^2}$  mit der Substitution

$$x = \sin(u) \quad \text{bzw.} \quad u = \arcsin(x)$$

zu  $\cos(u)$ . Allerdings erhalten wir auch

$$\frac{du}{dx} = \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

was zu

$$dx = \sqrt{1-x^2} du = \sqrt{1-\sin^2(u)} du = \cos(u) du$$

führt. Einsetzen in das Integral liefert mit  $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$  und  $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$  dann

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du.$$

Das letzte Integral können wir mit partieller Integration lösen

$$\begin{aligned} \int \cos^2(u) du &= \sin(u) \cos(u) - \int (-\sin^2(u)) du \\ &= \sin(u) \cos(u) + \int \sin^2(u) du \\ &= \sin(u) \cos(u) + \int (1 - \cos^2(u)) du \\ &= \sin(u) \cos(u) + u - \int \cos^2(u) du. \end{aligned}$$

Es folgt

$$2 \int \cos^2(u) du = \sin(u) \cos(u) + u.$$

Damit gilt

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (\sin(u) \cos(u) + u) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Damit ist die Fläche des Einheitskreises genau  $\pi$ . Mit derselben Technik lässt sich zeigen, dass die Fläche eines Kreis mit Radius  $r$  genau  $\pi r^2$  beträgt.

**8.3.3. Partialbruchzerlegung und Integration rationaler Funktionen.** Ein weiteres Problem ist die *Integration (gebrochen) rationaler Funktionen*, also von Funktionen der Form  $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  wobei  $p(x)$  und  $q(x)$  Polynomfunktionen sind.

Sei eine rationale Funktion  $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  gegeben. Zunächst muss man beachten, dass im Falle eines bestimmten Integrals nicht über eine Nullstelle von  $q(x)$  hinweg integriert werden darf. Abgesehen davon können wir die Stammfunktion von  $f(x)$  mit Hilfe der folgenden Schritte bestimmen.

**Polynomdivision:** Der erste Schritt ist eine Polynomdivision, sodass wir  $r(x)$  in der Form

$$a(x) + \frac{b(x)}{q(x)}$$

mit Polynomfunktionen  $a$  und  $b$  schreiben können, wobei der Grad von  $b(x)$  echt kleiner als der Grad von  $q(x)$  ist. Die Stammfunktion von  $a(x)$  können wir leicht finden. Also müssen wir uns nur noch mit der rationalen Funktion  $\frac{b(x)}{q(x)}$  beschäftigen, wobei der Grad von  $b(x)$  echt kleiner als der Grad von  $q(x)$  ist.

**Partialbruchzerlegung:** Ziel der Partialbruchzerlegung ist die Zerlegung von  $\frac{b(x)}{q(x)}$  als Summe von rationalen Funktionen mit „einfachem“ Nenner. Hierfür benutzt man den *Fundamentalsatz der Algebra*, der in der Doktorarbeit von Gauß im Jahr 1799 erschienen ist. Dieser Satz besagt, dass sich jede reelle Polynomfunktion als Produkt von Polynomen vom Grad höchstens 2 schreiben lässt. Es gibt also  $c \in \mathbb{R}$ , natürliche Zahlen  $0 \leq k \leq \ell$  und  $d_1, \dots, d_\ell \in \mathbb{N}$  und paarweise verschiedene Polynomfunktionen  $q_1, \dots, q_k$  mit Grad 1 und  $q_{k+1}, \dots, q_\ell$  vom Grad 2, sodass

$$q(x) = c \prod_{i=1}^{\ell} q_i^{d_i}(x) \quad \text{und} \quad \text{grad}(q) = \sum_{i=1}^k d_i + 2 \sum_{i=k+1}^{\ell} d_i.$$

Nun suchen wir Konstanten  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$ , die die Gleichung

$$b(x) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{d_i} A_{ij} \frac{q(x)}{q_i^j(x)} + \sum_{i=k+1}^{\ell} \sum_{j=1}^{d_i} (B_{ij}x + C_{ij}) \frac{q(x)}{q_i^j(x)} \quad (8.5)$$

erfüllen. Da die Polynome  $q_i^{d_i}$  Teiler des Polynoms  $q$  sind, sind alle Terme auf der rechten Seite Polynome. Für gegebene  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$  ist die rechte Seite ein Polynom mit Grad höchstens  $\text{grad}(q(x)) - 1 \geq \text{grad}(b(x))$  und für die Bestimmung von passenden  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$  führt (8.5) zu einem linearen Gleichungssystem. Dafür expandieren wir die rechte Seite von (8.5) und vergleichen die entsprechenden Koeffizienten der Potenzen  $x^j$  auf beiden Seiten. Mithilfe des Gauß-Verfahrens bestimmt man dann eine Lösung des entsprechenden Gleichungssystems. Tatsächlich kann man zeigen, dass dieses Gleichungssystem immer lösbar ist (Hauptsatz der Partialbruchzerlegung), allerdings geht der Beweis über den hier behandelten Rahmen hinaus.

Sei nun  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$ , sodass (8.5) gilt. Teilen wir beide Seiten in (8.5) durch  $q(x)$ , so erhalten wir

$$\frac{b(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{d_i} \frac{A_{ij}}{q_i^j(x)} + \sum_{i=k+1}^{\ell} \sum_{j=1}^{d_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{q_i^j(x)}.$$

Diese Zerlegung nennt man *Partialbruchzerlegung* von  $\frac{b(x)}{q(x)}$  und man kann zeigen, dass diese eindeutig ist. Da alle  $q_i$  Grad 1 oder 2 haben, reduziert

sich dadurch das Problem der Integration von  $\frac{b(x)}{q(x)}$  somit zur Integration von Funktionen der Form

$$\frac{A}{(x+a_0)^d} \quad \text{und} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+a_1x+a_0)^d}$$

für  $A, B, C, a_0, a_1 \in \mathbb{R}$  und  $d \in \mathbb{N}$ .

**Integration:** • Rationale Funktionen der Form  $\frac{A}{(x+a_0)^d}$  mit  $d \in \mathbb{N}$  können leicht mit Hilfe der Substitution  $u := x + a_0$  integriert werden. Für  $d = 1$  ergibt sich

$$\int \frac{A}{x+a_0} dx = \int \frac{A}{u} du = A \ln |u| = A \ln |x+a_0|$$

und für  $d \geq 2$  erhalten wir

$$\int \frac{A}{(x+a_0)^d} dx = \int \frac{A}{u^d} du = -\frac{A}{(d-1)u^{d-1}} = -\frac{1}{d-1} \cdot \frac{A}{(x+a_0)^{d-1}}.$$

- Betrachten wir nun das Integral von Funktionen der Form  $\frac{C}{(x^2+a_1x+a_0)^d}$  mit  $d \in \mathbb{N}$ , in denen der Nenner keine reelle Nullstelle hat. Da  $x^2 + a_1x + a_0$  keine Nullstelle hat, ist  $a_0 > a_1^2/4$  und somit ist  $\sqrt{4a_0 - a_1^2}$  positiv. Mit der Substitution

$$u := \frac{2x+a_1}{\sqrt{4a_0-a_1^2}}$$

erhalten wir

$$\int \frac{C}{(x^2+a_1x+a_0)^d} dx = \frac{2^{2d-1}C}{(4a_0-a_1^2)^{d-1/2}} \cdot \int \frac{1}{(u^2+1)^d} du. \quad (8.6)$$

Da  $\arctan(u)$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{u^2+1}$  ist, folgt für  $d = 1$

$$\begin{aligned} \int \frac{C}{x^2+a_1x+a_0} dx &= \frac{2C}{\sqrt{4a_0-a_1^2}} \cdot \int \frac{1}{u^2+1} du \\ &= \frac{2C}{\sqrt{4a_0-a_1^2}} \cdot \arctan(u) \\ &= \frac{2C}{\sqrt{4a_0-a_1^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x+a_1}{\sqrt{4a_0-a_1^2}}\right). \end{aligned}$$

Den allgemeinen Fall  $d > 1$  führen wir rekursiv auf  $d-1$  zurück. Mit Blick auf (8.6) ist es hinreichend, das Integral  $\int \frac{1}{(u^2+1)^d}$  zu lösen. Wir beginnen mit der Umformung

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^d} = \int \frac{u^2+1-u^2}{(u^2+1)^d} du = \int \frac{1}{(u^2+1)^{d-1}} du - \int \frac{u^2}{(u^2+1)^d} du \quad (8.7)$$

Das erste Integral  $\int \frac{1}{(u^2+1)^{d-1}}$  können wir rekursiv lösen und für das zweite Integral  $\int \frac{u^2}{(u^2+1)^d} du$  verwenden wir partielle Integration. Dafür schreiben wir das Integral als

$$\int \frac{u^2}{(u^2+1)^d} du = \frac{1}{2} \int \frac{2u}{(u^2+1)^d} \cdot u du. \quad (8.8)$$

Eine Stammfunktion von  $\frac{2u}{(u^2+1)^d}$  erhält man einfach mit der Substitution  $v := u^2 + 1$

$$\int \frac{2u}{(u^2+1)^d} du = \int \frac{1}{v^d} dv = -\frac{1}{(d-1)v^{d-1}} = -\frac{1}{(d-1)(u^2+1)^{d-1}}.$$

Somit ergibt sich für (8.8) mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int \frac{u^2}{(u^2+1)^d} du &= -\frac{u}{2(d-1)(u^2+1)^{d-1}} + \int \frac{1}{2(d-1)(u^2+1)^{d-1}} du \\ &= \frac{1}{2(d-1)} \int \frac{1}{(u^2+1)^{d-1}} du - \frac{u}{(2d-2)(u^2+1)^{d-1}}, \end{aligned}$$

wobei wieder ein Integral entsteht, welches wir rekursiv behandeln können.

Insgesamt erhalten wir also mit (8.7) die Rekursionsformel

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^d} = \frac{u}{2(d-1)(u^2+1)^{d-1}} + \frac{2d-3}{2d-2} \int \frac{1}{(u^2+1)^{d-1}} du,$$

was die Behandlung von Integralen der Form  $\int \frac{C}{(x^2+a_1x+a_0)^d} dx$  abschließt.

- Integrale von Funktionen der Form  $\frac{Bx+C}{(x^2+a_1x+a_0)^d}$  bringen wir zuerst in die Form

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+a_1x+a_0)^d} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x+a_1}{(x^2+a_1x+a_0)^d} dx + \int \frac{C-Ba_1/2}{(x^2+a_1x+a_0)^d} dx.$$

Summanden vom zweiten Typ haben wir bereits oben diskutiert. Summanden vom ersten Typ kann man mit der Substitution  $u := x^2 + a_1x + a_0$  integrieren. Für  $d = 1$  erhalten wir so

$$\frac{B}{2} \int \frac{2x+a_1}{x^2+a_1x+a_0} dx = \frac{B}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{B}{2} \ln |x^2+a_1x+a_0|$$

und für  $d \geq 2$  ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \frac{B}{2} \int \frac{2x+a_1}{(x^2+a_1x+a_0)^d} dx &= \frac{B}{2} \int \frac{1}{u^d} du \\ &= -\frac{B}{2} \frac{1}{(d-1)u^{d-1}} \\ &= -\frac{B}{2} \frac{1}{(d-1)(x^2+a_1x+a_0)^{d-1}}. \end{aligned}$$

**Beispiel 8.18.** Wir berechnen

$$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx.$$

Das Polynom im Nenner hat bereits einen kleineren Grad als das Polynom im Zähler, weshalb die Polynomdivision entfällt. Mit Hilfe der  $p$ - $q$ -Formel sehen wir, dass die Nullstellen des Nenners die Zahlen 2 und 3 sind. Es gilt

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6.$$

Damit gibt es  $A, B \in \mathbb{R}$  mit

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit  $x^2 - 5x + 6$ . Das liefert

$$x+1 = A(x-3) + B(x-2) = (A+B)x - 3A - 2B.$$

Über den reellen Zahlen sind zwei Polynomfunktionen genau dann gleich, wenn die beiden Polynome gleich sind, wenn also die Koeffizienten vor den entsprechenden Potenzen von  $x$  übereinstimmen. Es ergibt sich also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A+B &= 1, \\ -3A-2B &= 1. \end{aligned}$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems erhält man  $A = -3$  und  $B = 4$ . Die gesuchte Partialbruchzerlegung lautet damit

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{-3}{x-2} + \frac{4}{x-3}.$$

Um das Integral  $\int \frac{-3}{x-2} dx$  zu berechnen, substituieren wir

$$u := x - 2$$

und erhalten  $du = dx$ . Damit ist

$$\int \frac{-3}{x-2} dx = \int \frac{-3}{u} du = -3 \ln |u| = -3 \ln |x-2|.$$

Analog sieht man

$$\int \frac{4}{x-3} dx = 4 \ln |x-3|.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx = \int \left( \frac{-3}{x-2} + \frac{4}{x-3} \right) dx = -3 \ln |x-2| + 4 \ln |x-3|.$$

**Beispiel 8.19.** Wir wollen

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2+x-1} dx$$

berechnen. Wieder brauchen wir keine Polynomdivision durchzuführen. Wir raten eine Nullstelle des Nenners, nämlich 1. Eine Polynomdivision liefert

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2 + 1).$$

Damit existieren  $A, B, C \in \mathbb{R}$  mit

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit  $x^3 - x^2 + x - 1$  und erhalten

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1) \\ &= Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C \\ &= (A + B)x^2 + (-B + C)x + A - C. \end{aligned}$$

Das liefert das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -B + C &= 3 \\ A - C &= 5. \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung dieses Gleichungssystems lautet  $A = 4$ ,  $B = -4$  und  $C = -1$  und es folgt

$$\frac{3x + 5}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{4}{x - 1} + \frac{-4x - 1}{x^2 + 1}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 5}{x^3 - x^2 + x - 1} dx &= \int \left( \frac{4}{x - 1} + \frac{-4x - 1}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \int \frac{4}{x - 1} dx - 2 \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= 4 \ln |x - 1| - 2 \ln |x^2 + 1| - \arctan(x). \end{aligned}$$

**Beispiel 8.20.** Wir berechnen

$$\int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

Es gilt  $(x^2 + 2x + 5)' = 2x + 2$  und

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 5} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 6}{x^2 + 2x + 5} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} dx + 2 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx. \end{aligned}$$

Das erste der beiden Integrale berechnet man mit Hilfe der Substitution

$$u := x^2 + 2x + 5,$$

also  $du = (2x + 2) dx$ , und erhält

$$\int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| = \ln |x^2 + 2x + 5|.$$

Für das zweite Integral substituieren wir mit

$$u := \frac{2x + 2}{\sqrt{20 - 4}} = \frac{x + 1}{2},$$

also  $x = 2u - 1$  und  $dx = 2 du$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx &= \int \frac{2}{(2u - 1)^2 + 2(2u - 1) + 5} du \\ &= \int \frac{2}{4u^2 + 4} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= \frac{1}{2} \arctan(u) \\ &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x + 1}{2}\right). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 5| + \arctan\left(\frac{x + 1}{2}\right).$$

### §8.4 UNEIGENTLICHE INTEGRALE

Bisher haben wir bestimmte Integrale auf endlichen, abgeschlossenen Intervallen  $[a, b]$  berechnet und dabei vorausgesetzt, dass der Integrand  $f(x)$  auf ganz  $[a, b]$  definiert und beschränkt ist. Man kann aber manchmal auch Integralen auf unendlichen Intervallen oder auf Intervallen  $[a, b]$ , an deren Grenzen  $f(x)$  nicht definiert ist, auf sinnvolle Weise einen Wert zuweisen.

**Beispiel 8.21.** (a) Wir betrachten das Integral  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ . Wir wollen also die Fläche unter der Kurve  $\frac{1}{x^2}$  auf dem Intervall  $[1, \infty)$  berechnen. Es gilt

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}.$$

und es ist naheliegend, den Wert von  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$  als Grenzwert  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx$  zu definieren. Damit erhalten wir

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1.$$

Analog zeigt man  $\int_1^\infty \frac{1}{x^r} dx = \frac{1}{r-1}$  für alle reellen  $r > 1$ .

(b) Nun betrachten wir den Fall  $r = 1$ , also das Integral  $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ . Bekanntlich ist

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|.$$

Es gilt

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln|x|\Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(b) - 0) = \infty,$$

d. h.  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx$  divergiert bestimmt.

**Definition 8.22.** Sei  $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  für jedes  $b > a$  auf dem Intervall  $[a, b]$  integrierbar. Falls der Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

existiert, so nennen wir  $f$  auf dem Intervall  $[a, \infty)$  uneigentlich integrierbar und definieren

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Wir sagen in diesem Fall auch, dass das Integral  $\int_a^\infty f(x) dx$  existiert (oder auch, dass es konvergiert) und  $\int_a^\infty f(x) dx$  ist ein uneigentliches Integral. Analog definiert man  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ .

Falls  $f$  für ein  $c \in \mathbb{R}$  sowohl auf  $(-\infty, c]$  als auch auf  $[c, \infty)$  uneigentlich integrierbar ist, so nennen wir  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  uneigentlich integrierbar und definieren

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx.$$

Genauso definiert man für eine Funktion  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  die für jeden abgeschlossenen Teilintervall  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$  integrierbar ist

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a} \int_\alpha^c f(x) + \lim_{\beta \rightarrow b} \int_c^\beta f(x),$$

falls die beiden Grenzwerte für ein  $c \in (a, b)$  existieren.

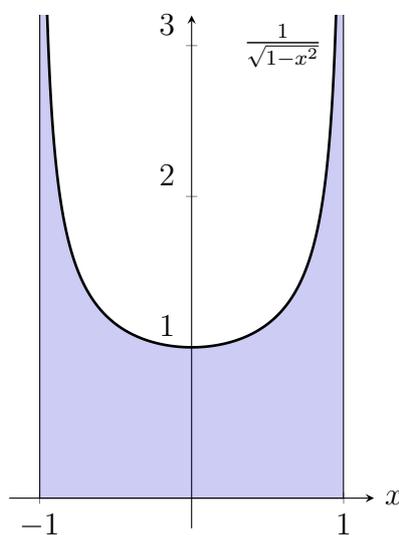


ABBILDUNG 8.4. Uneigentliches Integral  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

**Beispiel 8.23.** (a) Wir untersuchen das Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Da  $\arcsin(x)$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  ist und  $\arcsin(0) = 0$ , erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow -1} \int_{\alpha}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \lim_{\beta \rightarrow 1} \int_0^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -1} (0 - \arcsin(\alpha)) + \lim_{\beta \rightarrow 1} (\arcsin(\beta) + 0) \\ &= -\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

(b) Auf ganz ähnliche Weise können wir das uneigentliche Integral von  $\frac{1}{1+x^2}$  auf ganz  $\mathbb{R}$  bestimmen. Hierfür erinnern wir uns, dass  $\arctan(x)$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{1+x^2}$  ist und es folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (0 - \arctan(a)) + \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan(b) + 0) \\ &= -\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

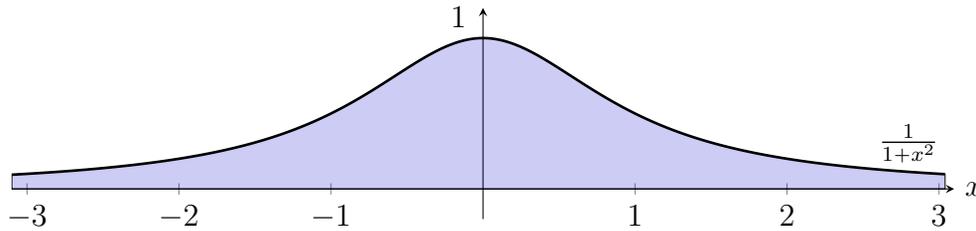


ABBILDUNG 8.5. Uneigentliches Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

Mit uneigentlichen Integralen kann man das Konvergenzverhalten von Reihen untersuchen.

**Satz 8.24.** Sei  $f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  stetig und monoton fallend. Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  genau dann, wenn  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  konvergiert.

BEWEIS. Da  $f$  monoton fällt, nimmt es seine Extrema über abgeschlossenen Intervallen an deren Grenzen an und nach Satz 8.6 (iv) gelten für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichungen

$$f(n+1) = f(n+1) \cdot 1 \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) \cdot 1 = f(n).$$

Es folgt

$$\sum_{i=1}^n f(i+1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{i=1}^n f(i).$$

Ist also  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$ , so gilt auch  $\int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$ .

Gilt umgekehrt  $\int_1^\infty f(x) dx < \infty$ , so ist  $\sum_{n=2}^\infty f(n) < \infty$ . Damit konvergiert aber auch die Reihe  $\sum_{n=1}^\infty f(n)$  für jedes beliebige  $f(1) \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Mithilfe von Satz 8.24 und Beispiel 8.21 kann man leicht das Konvergenzverhalten der Reihen  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^r}$  für reelle  $r \geq 1$  bestimmen (siehe auch Kapitel 5.7).

**Korollar 8.25.** *Die harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$  divergiert und die Reihe  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^r}$  konvergiert für alle  $r > 1$ .*  $\square$



## Komplexe Zahlen

Einer der Gründe, warum man anstelle der rationalen Zahlen mit den reellen Zahlen arbeitet ist der, dass sich gewisse Gleichungen in  $\mathbb{Q}$  nicht lösen lassen, während in  $\mathbb{R}$  Lösungen existieren. Ein Beispiel ist die Gleichung

$$x^2 = 2,$$

die die irrationalen Lösungen  $\pm\sqrt{2}$  hat. Da das Quadrat jeder reellen Zahl  $\geq 0$  ist, lässt sich aber zum Beispiel die Gleichung  $x^2 = -1$  in  $\mathbb{R}$  nicht lösen. Dieses Problem lösen wir, indem wir ein letztes Mal den Zahlenbereich erweitern und von den reellen Zahlen zu den *komplexen Zahlen* übergehen. Die komplexen Zahlen werden in vielen Anwendungen der Mathematik benötigt, etwa in der Physik oder in der Elektrotechnik.

**Definition A.1.** Wir setzen

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Auf  $\mathbb{C}$  definieren wir eine Addition und eine Multiplikation. Für alle  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  sei

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

**Satz A.2.** Die Menge  $\mathbb{C}$  bildet bezüglich der in Definition A.1 definierten Addition und Multiplikation einen Körper, den wir auch mit  $\mathbb{C}$  bezeichnen.

**BEWEIS.** Die Assoziativ- und Kommutativgesetze sowie das Distributivgesetz rechnet man schnell nach. Das neutrale Element bezüglich der Addition ist  $(0, 0)$ . Wie üblich bezeichnen wir dieses neutrale Element ebenfalls mit  $0$ . Wir wissen auch schon, dass  $(\mathbb{C}, +)$  eine abelsche Gruppe ist, nämlich dieselbe abelsche Gruppe wie die Gruppe  $(\mathbb{R}^2, +)$ . Das zu  $(a, b)$  inverse Element bezüglich  $+$  ist also  $-(a, b) = (-a, -b)$ .

Das neutrale Element bezüglich  $\cdot$  ist  $(1, 0)$ . Für alle  $(a, b) \in \mathbb{C}$  gilt nämlich

$$(a, b) \cdot (1, 0) := (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b).$$

Ist  $(a, b) \neq (0, 0)$  so ist

$$\left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

das zu  $(a, b)$  inverse Element bezüglich der Multiplikation:

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \\ = \left( a \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2}, a \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0) \end{aligned}$$

□

Um nun den Körper  $\mathbb{C}$  der *komplexen Zahlen* als Erweiterung von  $\mathbb{R}$  auffassen zu können, müssen wir  $\mathbb{R}$  mit einer geeigneten Teilmenge von  $\mathbb{C}$  identifizieren. Diese Teilmenge ist einfach die  $x$ -Achse in  $\mathbb{R}^2$ , also die Menge

$$R = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}.$$

In der Tat rechnet man schnell nach, dass für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \text{ und } (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab, 0)$$

Das zeigt, dass die Abbildung  $a \mapsto (a, 0)$  ein Isomorphismus von Körpern zwischen dem Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen und dem Unterkörper  $R$  von  $\mathbb{C}$  ist.

Wir können also tatsächlich so tun, als ob die Menge  $\mathbb{R}$  eine Teilmenge von  $\mathbb{C}$  ist. Wir vereinfachen nun unsere Notation wie folgt:

**Definition A.3.** Die komplexe Zahl  $(0, 1)$  nennen wir die imaginäre Einheit und bezeichnen sie mit  $i$ . Anstelle von  $(a, b)$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  schreiben wir  $a + ib$ . Dabei nennen wir  $a$  den Realteil der komplexen Zahl  $z = a + ib$  und  $b$  den Imaginärteil, welche wir mit

$$\Re(z) = a \quad \text{und} \quad \Im(z) = b$$

bezeichnen.

Es gilt

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1.$$

Praktisch kann man nun mit komplexen Zahlen in der Form  $a + ib$  wie folgt rechnen:

- Es dürfen die bekannten Rechenregeln in Körpern angewendet werden.
- Immer wenn wir einem Term  $i^2$  begegnen, können wir diesen durch  $-1$  ersetzen.
- Am Ende der Rechnung ordnen wir die Terme so, dass wir wieder einen Ausdruck der Form  $c + id$  erhalten.

**Beispiel A.4.** (a) Es gilt  $(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d)$ . Das entspricht genau unserer Definition von  $(a, b) + (c, d)$ .

(b) Es gilt

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + aid + ibc + i^2bd = ac - bd + i(ad + bc).$$

Das entspricht genau unserer Definition von  $(a, b) \cdot (c, d)$ .

(c) Wir dividieren zwei komplexe Zahlen  $a + \mathbf{i}b$  und  $c + \mathbf{i}d$ . Sei  $c + \mathbf{i}d \neq 0$ , d. h., wir nehmen an, dass  $c$  und  $d$  nicht beide 0 sind. Dann gilt

$$\frac{a + \mathbf{i}b}{c + \mathbf{i}d} = \frac{(a + \mathbf{i}b) \cdot (c - \mathbf{i}d)}{(c + \mathbf{i}d) \cdot (c - \mathbf{i}d)} = \frac{ac + bd + \mathbf{i}(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

Insbesondere ist

$$\frac{1}{c + \mathbf{i}d} = \frac{c - \mathbf{i}d}{c^2 + d^2}.$$

**Definition A.5.** Für eine komplexe Zahl  $z = a + \mathbf{i}b$  ist  $\bar{z} := a - \mathbf{i}b$  die zu  $z$  konjugiert komplexe Zahl. Der Betrag von  $z$  ist die Zahl  $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**Satz A.6.** Für jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  gilt:

- (i)  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ ,
- (ii)  $\Re(z) \leq |z|$ ,
- (iii)  $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  und  $\Im(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$
- (iv) und für zwei komplexe Zahlen  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

sowie

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

BEWEIS. Teil (i) erhalten wir direkt aus den entsprechenden Definitionen

$$(a + \mathbf{i}b) \cdot (a - \mathbf{i}b) = a^2 - \mathbf{i}^2 b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Die anderen Aussagen rechnet man ebenso leicht nach. □

Manchmal ist es sinnvoll, komplexe Zahlen nicht durch  $x$ - und  $y$ -Koordinaten darzustellen, sondern durch *Polarkoordinaten*. Dabei wird der Punkt

$$x + \mathbf{i}y = (x, y) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

durch den Winkel  $\varphi$  der Geraden durch den Nullpunkt und  $(x, y)$  und den Betrag  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$  der komplexen Zahl  $x + \mathbf{i}y$  beschrieben. Man beachte, dass im Fall  $r = 0$  alle Winkel  $\varphi$  dieselbe komplexe Zahl, nämlich 0, beschreiben.

Sind der Winkel  $\varphi$  und der Betrag  $r$  einer komplexen Zahl  $z$  gegeben, so ist

$$z = x + \mathbf{i}y = r(\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi).$$

Man beachte, dass im Falle  $x \neq 0$  die Gleichung

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{y}{x}$$

gilt. Möchte man den Winkel  $\varphi$  im Intervall  $[0, 2\pi)$  aus  $x$  und  $y$  berechnen, so muss man verschiedene Fälle unterscheiden:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{falls } x > 0 \text{ und } y \geq 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi, & \text{falls } x > 0 \text{ und } y < 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{falls } x < 0, \\ \pi/2, & \text{falls } x = 0 \text{ und } y > 0, \\ 3\pi/2, & \text{falls } x = 0 \text{ und } y < 0 \end{cases}$$

Eine andere Möglichkeit ist es, den Arcuscosinus zu benutzen, um  $\varphi$  zu berechnen.

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{r}, & \text{falls } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{r}, & \text{falls } y < 0 \end{cases}$$

Wir untersuchen die Multiplikation komplexer Zahlen in Polarkoordinaten. Sei

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha)$$

und

$$z_2 = r_2 \cdot (\cos \beta + \mathbf{i} \sin \beta).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \mathbf{i} \cdot (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\alpha + \beta) + \mathbf{i} \sin(\alpha + \beta)). \end{aligned}$$

In Polarkoordinaten kann man die Multiplikation also wie folgt beschreiben: *Die Beträge der Zahlen werden multipliziert und die Winkel addiert.*

Eine unmittelbare Folge dieser Feststellung ist die folgende Beobachtung.

**Bemerkung A.7.** Für jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  und jedes  $n \in \mathbb{N}$  existiert eine komplexe Zahl  $\zeta$  mit  $\zeta^n = z$ . Sei nämlich  $z$  in Polarkoordinaten durch den Winkel  $\varphi$  und den Betrag  $r$  gegeben. Dann erfüllt

$$\zeta := \sqrt[n]{r} \cdot \left( \cos \frac{\varphi}{n} + \mathbf{i} \sin \frac{\varphi}{n} \right).$$

die Gleichung  $\zeta^n = z$ .

Eine Verstärkung dieser Bemerkung zeigt, dass wir mit den komplexen Zahlen einen Zahlenbereich gefunden haben, in dem sich Polynomgleichungen lösen lassen.

**Satz A.8** (Fundamentalsatz der Algebra). *Für jedes Polynom  $p \in \mathbb{C}[X]$  vom Grad  $\geq 1$  existiert eine komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  mit  $p(z) = 0$ . Damit zerfällt jedes nicht-konstante Polynom über  $\mathbb{C}$  in Linearfaktoren.*  $\square$

Einen Beweis des Fundamentalsatzes findet man zum Beispiel in [4].

## Notation

- $\mathcal{P}(M)$ : Potenzmenge  $\{A: A \subseteq M\}$  von  $M$   
 $|M|$ : Anzahl der Elemente einer endlichen Menge  $M$   
 $\mathbb{N}$ : natürliche Zahlen  $\{1, 2, 3, \dots\}$   
 $\mathbb{N}_0$ : natürliche Zahlen mit Null  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$   
 $[n]$ : ersten  $n$  natürlichen Zahlen  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$   
 $\mathbb{Z}$ : ganze Zahlen  $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$   
 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ : Restklassenring  $\{[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m\}$  der Kongruenzen modulo  $m$   
 $\mathbb{F}_q$ : endlicher Körper mit  $q = p^k$  Elementen für eine Primzahl  $p$  und  $k \in \mathbb{N}$ , insbesondere ist  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  für jede Primzahl  $p$   
 $\mathbb{Q}$ : Körper der rationalen Zahlen  $\{\frac{a}{b}: a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$   
 $\mathbb{R}$ : Körper der reellen Zahlen  
 $\mathbb{C}$ : Körper der komplexen Zahlen  
 $i$ : imaginäre Einheit der komplexen Zahlen  
 $\Re(z)$ : Realteil der komplexen Zahl  $z$   
 $\Im(z)$ : Imaginärteil der komplexen Zahl  $z$   
 $(a, b)$ : offenes Intervall  $\{\xi \in \mathbb{R}: a < \xi < b\}$   
 $(a, b], [a, b)$ : halboffene Intervalle  $\{\xi \in \mathbb{R}: a < \xi \leq b\}$  bzw.  $\{\xi \in \mathbb{R}: a \leq \xi < b\}$   
 $[a, b]$ : abgeschlossenes Intervall  $\{\xi \in \mathbb{R}: a \leq \xi \leq b\}$   
 $\lfloor \xi \rfloor$ : Gauß-Klammer einer reellen Zahl, die größte ganze Zahl kleiner gleich  $\xi$   
 $|\xi|$ : Absolutbetrag einer reellen Zahl, definiert als  $\xi$  für  $\xi \geq 0$  und  $-\xi$  für  $\xi < 0$   
 $R^\times$ : Einheitengruppe eines Rings  $R$  mit 1  
 $\mathbb{K}[X]$ : Polynomring über dem Körper  $\mathbb{K}$   
 $\text{grad}(p)$ : Grad des Polynoms  $p$   
 $\mathbb{K}^n$ :  $n$ -dimensionaler Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{K}$   
 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ : Skalarprodukt  $\sum_{i=1}^n u_i v_i$  von  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  und  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$   
 $|\mathbf{v}|$ : Betrag  $\sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$  von  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$   
 $\mathbb{K}^{m \times n}$ : Matrizen über dem Körper  $\mathbb{K}$  mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten  
 $\mathbb{K}^{n \times n}$ : Ring der  $n \times n$ -Matrizen über dem Körper  $\mathbb{K}$   
 $E_n$ : Einheitsmatrix in  $\mathbb{K}^{n \times n}$  mit Einsen auf der Diagonalen und sonst nur Nullen  
 $\text{span}(U)$ : Untervektorraum der linearen Hülle der Vektoren aus  $U$   
 $\dim(V)$ : Dimension des Vektorraums  $V$   
 $\ker(f)$ : Kern  $\{\mathbf{v} \in V: f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \subseteq V$  einer linearen Abbildung  $f: V \rightarrow W$   
 $\text{im}(f)$ : Bild  $\{f(\mathbf{v}): \mathbf{v} \in V\} \subseteq W$  einer linearen Abbildung  $f: V \rightarrow W$   
 $\mathcal{S}_n$ : Gruppe der Permutationen von  $[n]$  mit der Operation der Komposition

- $\mathcal{A}_n$ : alternierende Untergruppe von  $\mathcal{S}_n$  der geraden Permutationen
- $\text{sgn}(\pi)$ : Signum der Permutation  $\pi$ , 1 für gerade und  $-1$  für ungerade Permutationen
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ : Grenzwert einer konvergenten Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x)$ : Funktionsgrenzwert an der Stelle  $\hat{x}$
- $f'(x)$ : Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x$
- $f^{(n)}(x)$ :  $n$ -te Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  mit  $f^{(0)} = f$ ,  $f^{(1)} = f'$ ,  
 $f^{(2)} = f''$  und  $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$
- $\int_a^b f(x) dx$ : bestimmtes Integral der Funktion  $f$  über dem Intervall  $[a, b]$
- $\int f(x) dx$ : unbestimmtes Integral/Stammfunktion von  $f$
- $F(x) \Big|_a^b$ : Kurzschreibweise für  $F(b) - F(a)$