ANZAHL VON SPANNBÄUMEN

MATHIAS SCHACHT

Zusammenfassung. Die Cayley-Formel über die Anzahl von Spannbäumen auf $[n]$ basierend auf der Idee von Pitman wird bewiesen.

§1 Spannbäume

Für $n \geqslant 1$ sei $\mathscr{T}(n)$ die Menge der Spannbäume des vollständigen Graphen mit Eckenmenge $[n]$ und wir bezeichnen mit

$$T(n) = |\mathscr{T}(n)|$$

die Anzahl dieser Bäume. Insbesondere sind die Ecken hier unterscheidbar und so werden z. B. die drei Wege mit zwei Kanten auf $[3]$, als drei Spannbäume gezählt, auch wenn sie als Graphen isomorph sind. Die folgende, nach Cayley benannte Formel, bestimmt $T(n)$.

Satz 1 (Cayley-Formel)**.** *Für jede natürliche Zahl $n \geqslant 1$ gilt $T(n) = n^{n-2}$.*

Diese Formel wurde mehrfach wiederentdeckt und viele unterschiedliche Beweise wurden gefunden (siehe z. B. [7]). Cayley [3] verweist auf die Arbeit von Borchardt [1] und frühere Ansätze lassen sich bei Kirchhoff [5] und bei Sylvester [13] finden. Zu den bekanntesten Beweisen zählen die Arbeiten von Prüfer [9], Rényi [10, 11], Moon [6], Riordan [12], Joyal [4] und der folgende Beweis geht auf eine Idee von Pitman [8] zurück.

Wir betrachten Wurzelwälder auf $[n]$ mit k Kanten die mit 1 bis k durchnummeriert sind. Für natürliche Zahlen $n > k \geqslant 0$ sei $\mathscr{F}(n,k)$ die Menge dieser Wurzelwälder. Insbesondere besteht jeder Wald $F \in \mathscr{F}(n,k)$ aus genau $n-k$ Wurzelbäumen, d. h. jede Komponente von F ist ein Wurzelbaum. Für $k=0$ enthält $\mathscr{F}(n,0)$ nur den trivialen Wald der aus n einzelnen Wurzeln besteht und für jedes $n \geqslant 1$ gilt

$$|\mathscr{F}(n,0)| = 1\,. \tag{1.1}$$

Auf der anderen Seite kann für jeden Spannbaum aus $\mathscr{T}(n)$ eine der n Ecken als Wurzel ausgezeichnet werden und die $n-1$ Kanten auf $(n-1)!$ unterschiedliche Arten durchnummeriert werden. Es gilt also

$$|\mathscr{F}(n,n-1)| = T(n) \cdot n \cdot (n-1)! = n! \cdot T(n)\,. \tag{1.2}$$

Satz 1 folgt nun aus (1.2) und der folgenden Behauptung für $k = n-1$.

Behauptung 2. *Für alle natürlichen Zahlen $n > k \geqslant 0$ gilt $|\mathscr{F}(n,k)| = \prod_{i=1}^{k} n(n-i)$. Insbesondere für $k = n-1$ erhalten wir $|\mathscr{F}(n,n-1)| = n^{n-1} \cdot (n-1)! = n! \cdot n^{n-2}$.*

Beweis. Für festes n führen wir Induktion nach k und (1.1) etabliert den Induktionsanfang für $k = 0$. Für den Induktionsschritt fügen wir eine Kante mit Nummer k wie folgt in einen Wurzelwald F aus $\mathscr{F}(n,k-1)$ ein:

(a) Wähle eine beliebige Ecke $v \in [n]$ und sei r_v die Wurzel des Baumes der v enthält.
(b) Wähle eine beliebige Wurzel $w \neq r_v$ aus F.
(c) Füge die Kante vw mit Nummer k ein, wobei der neu entstandene Baum die Wurzel r_v erhält.

Durch diese Prozedur konstruieren wir aus jedem Wald aus $\mathscr{F}(n,k-1)$ einen Wald aus $\mathscr{F}(n,k)$ den wir mit (F,v,w) bezeichnen.

Es ist leicht ersichtlich, dass jeder Wald $F_\star$ aus $\mathscr{F}(n,k)$ auf diese Weise konstruiert werden kann. Dafür sei xy die Kante mit Nummer k und r die Wurzel des Baumes $T_\star$ der xy enthält in $F_\star$. Durch das Entfernen von xy zerfällt $T_\star$ in zwei Bäume T_x und T_y mit $x \in V(T_x)$ und $y \in V(T_y)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $r \in V(T_x)$ annehmen. Mit der Wahl y als Wurzel von T_y und r als Wurzel von T_x, erhalten wir einen Wurzelwald $F \in \mathscr{F}(n,k-1)$ und es folgt $F' = (F,x,y)$.

Es gibt n Auswahlmöglichkeiten für v in (a) und, da jeder Wald aus $\mathscr{F}(n,k-1)$ genau $n-(k-1) = n-k+1$ Komponenten hat, gibt es $n-k$ Wahlmöglichkeiten für die Wurzel w in Schritt (b). Somit gilt

$$|\mathscr{F}(n,k)| \leqslant |\mathscr{F}(n,k-1)| \cdot n \cdot (n-k)$$

und Behauptung 2 folgt mit Induktion, wenn wir zeigen, dass alle Auswahlen zu unterschiedlichen Wäldern in $\mathscr{F}(n,k)$ führen. Seien also (F,v,w) und (F',v',w') der gleiche Wurzelwald mit der gleichen Kantennummerierung in $\mathscr{F}(n,k)$. Auf Grund der gleichen Kantennummerierung folgt $E(F) = E(F')$ und $\{v,w\} = \{v',w'\}$. Insbesondere bestehen F und F' aus den gleichen Bäumen und die $n-k-1$ Bäume die weder v noch w enthalten, haben in F und in F' auch jeweils die gleiche Wurzel.

Falls $v = v'$ und damit auch $w = w'$, dann ist wegen (b) $w = w'$ jeweils die Wurzel des Baumes der $w = w'$ enthält und wegen (c) und $(F,v,w) = (F',v',w')$ müssen dann auch die Wurzeln der Bäume die $v = v'$ enthalten identisch sein. D. h. die Wurzelwälder F und F' mit $k-1$ durchnummerierten Kanten waren identisch.

Bleibt noch der Fall $v = w'$ und $w = v'$ zu betrachten. Sei r die Wurzel des Baumes der v enthält in F. Nach (c) ist dann r die Wurzel des Baumes der v und w enthält in (F,v,w). Auf der anderen Seite, ist dann r auch die Wurzel des Baumes in (F',v',w') der v' und w' enthält und wiederum wegen (c) ist r die Wurzel des Baumes in F' der v' enthält. D. h. v und $w = v'$ liegen im gleichen Baum in F, was ein Widerspruch zur Wahl in (b) ist. □

Literatur

[1] C. W. Borchardt, *Ueber eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Eliminations-Resultante*, J. Reine Angew. Math. **57** (1860), 111–121, DOI 10.1515/crll.1860.57.111 (German). MR1579119 ↑1

[2] R. L. Brooks, C. A. B. Smith, A. H. Stone, and W. T. Tutte, *The dissection of rectangles into squares*, Duke Math. J. **7** (1940), 312–340, DOI 10.1215/S0012-7094-40-00718-9. MR3040 ↑

[3] A. Cayley, *A theorem on trees*, Quart. J. Pure Appl. Math. **23** (1889), 376–378. ↑1

[4] A. Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. in Math. **42** (1981), no. 1, 1–82, DOI 10.1016/0001-8708(81)90052-9 (French, with English summary). MR633783 ↑1

[5] G. Kirchhoff, *Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird*, Ann. Phys. Chemie **72**, no. 12, 497–508, DOI 10.1002/andp.18471481202. ↑1

[6] J. W. Moon, *Mathematical Notes: Another Proof of Cayley's Formula for Counting Trees*, Amer. Math. Monthly **70** (1963), no. 8, 846–847, DOI 10.2307/2312668. MR1532311 ↑1

[7] ———, *Counting labelled trees*, Canadian Mathematical Monographs, No. 1, Canadian Mathematical Congress, Montreal, Que., 1970. From lectures delivered to the Twelfth Biennial Seminar of the Canadian Mathematical Congress (Vancouver, 1969). MR0274333 ↑1

[8] J. Pitman, *Coalescent random forests*, J. Combin. Theory Ser. A **85** (1999), no. 2, 165–193, DOI 10.1006/jcta.1998.2919. MR1673928 ↑1

[9] H. Prüfer, *Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen*, Arch. der Math. u. Phys. (3) **27** (1918), 142–144. ↑1

[10] A. Rényi, *Some remarks on the theory of trees*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. **4** (1959), 73–85 (English, with Russian and Hungarian summaries). MR115938 ↑1

[11] ———, *On the enumeration of trees*, Combinatorial Structures and their Applications (Proc. Calgary Internat. Conf., Calgary, Alta., 1969), Gordon and Breach, New York, 1970, pp. 355–360. MR0263708 ↑1

[12] J. Riordan, *The enumeration of labeled trees by degrees*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 110–112, DOI 10.1090/S0002-9904-1966-11442-8. MR186583 ↑1

[13] J. J. Sylvester, *On the change of systems of independent variables*, Q. J. Math. **1** (1857), 42–56. ↑1

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg, Hamburg, Germany

Email address: schacht@math.uni-hamburg.de