Das Zermelo-Fraenkel'sche Axiomensystem

Quelle: [De, Kap. 2.3]

1. *Extensionalitätsaxiom.* Wenn zwei Mengen die gleichen Elemente haben, sind sie gleich:
$$\forall x, y \ : \ \big(\forall z : z \in x \Leftrightarrow z \in y\big) \ \Rightarrow \ x = y \ .$$

2. *Leermengenaxiom.* Es gibt eine Menge, die keine Elemente enthält:
$$\exists x : \forall y : \neg(y \in x) \ .$$
(Man zeigt: diese Menge ist eindeutig, wir nennen sie die *leere Menge* $\emptyset$.)

3. *Unendlichkeitsaxiom.* Es gibt eine Menge M mit $\emptyset \in M$, so dass mit $m \in M$ auch $\{m\} \in M$:
$$\exists x \ : \ \emptyset \in x \ \wedge \ \big(\forall z : z \in x \Rightarrow \{z\} \in x\big)$$

4. *Potenzmengenaxiom.* Für jede Menge M gibt es eine Menge $\mathcal{P}(M)$, deren Elemente genau die Teilmengen von M sind:
$$\forall x : \exists p : \forall y : \ y \in p \ \Leftrightarrow \ (\forall z : z \in y \Rightarrow z \in x) \ .$$

5. *Vereinigungsaxiom.* Für jede Menge M gibt es eine Menge $\bigcup M$, die aus allen Elementen der Elemente von M besteht.

6. *Ersetzungsaxiom.* Sei $A(x, y)$ ein Ausdruck mit Variablen x, y, so dass es für jede Menge M eine eindeutige Menge N gibt, für die $A(M, N)$ wahr ist. Sei R eine Menge. Dann gibt es eine Menge S, die genau aus den N besteht, für die $A(M, N)$ für ein $M \in R$ wahr ist.

7. *Aussonderungsaxiom.* Sei M eine Menge und $A(x)$ ein Ausdruck mit freier Variable x. Dann gibt es eine Menge, die genau aus den Elementen $m \in M$ besteht, für die $A(m)$ wahr ist.

8. *Fundierungsaxiom.* Jede nicht-leere Menge M enthält ein $m \in M$ mit $m \cap M = \emptyset$.

9. *Auswahlaxiom.* Wenn eine Menge F aus paarweise disjunkten, nicht-leeren Mengen besteht, dann gibt es eine Menge M, die genau ein Element aus jedem Element von F enthält.

Axiome (1)-(8) nennte man „ZF“ und Axiome (1)-(9) nennt man „ZFC“ (mit „C“ wie „choice“). Russels Paradox tritt nicht auf, da Vorschrift $\{x | x \notin x\}$ nicht aus den ZFC Axiomen formuliert werden kann.

[De] Devlin, *The joy of sets*, 2nd ed., Springer 1993.