Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

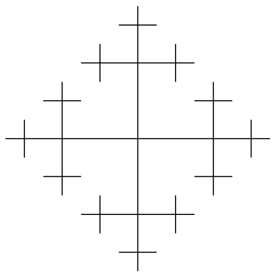
Wintersemester 2024/25

Blatt 12 Abgabetermin: 24.01.2025, 15:45h in H5

(1) (Kompaktheit, T_2 und Konstruktionen) (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
Es sei $p\colon \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung.
a) Zeigen Sie: Ist X kompakt und p endlich-blättrig, so ist $\widetilde{X}$ ebenfalls kompakt.
b) Beweisen Sie, dass $\widetilde{X}$ hausdorffsch ist, falls X hausdorffsch ist.
c) Sind $p_1\colon \widetilde{X} \to X$ und $p_2\colon \widetilde{Y} \to Y$ Überlagerungen, ist dann $(p_1, p_2)\colon \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \to X \times Y$ eine Überlagerung?
d) Sind $p\colon \widetilde{X} \to X$ und $q\colon \widetilde{\widetilde{X}} \to \widetilde{X}$ endlich-blättrige Überlagerungen, ist dann $p \circ q$ eine Überlagerung?

(2) (Eine Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$) (3 Punkte)
Es sei $\widetilde{X}$ ein Raum über $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, der als direkter Limes $\widetilde{X} = \varinjlim X_n$ konstruiert ist. Es sei x_0 ein Grundpunkt, X_1 sei der Raum, der entsteht, wenn wir an x_0 vier Kanten mit Länge eins ankleben, die Endpunkte der Kanten seien $x_1, \ldots, x_4$. Der Raum X_2 entstehe aus X_1 durch Ankleben von je drei Kanten der Länge $1/2$ an die Punkte $x_1, \ldots, x_4$. Die Endpunkte der Kanten an x_i heissen x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}. Im n-ten Schritt sei X_n konstruiert mit Endpunkten $x_{i_1 \ldots i_n}$ und wir kleben je drei Kanten der Länge $1/2^{n-1}$ an mit Endpunkten $x_{i_1 \ldots i_{n+1}}$.

Es sei $\widetilde{X}$ also der direkte Limes der X_n. Zeigen Sie, dass $\widetilde{X}$ eine triviale Fundamentalgruppe hat.

$X_3 =$ 

(3) (Zurückziehen von Überlagerungen) (2 Punkte)
Es sei $p\colon \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f\colon Y \to X$ eine stetige Abbildung. Betrachten Sie den pullback $\tilde{Y} =: f^*(p)$ des inversen Systems

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} = f^*(p) \arrow[r, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[d, dotted, "\tilde{p}"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X. \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{p}$ wiederum eine Überlagerung ist mit derselben typischen Faser wie p.

(4) (Cayley Graphen) (2 + 2 Punkte)
Die Gruppe G sei präsentiert als $G = \langle x_i, i \in I \mid r_j, j \in J \rangle$. Konstruieren Sie den folgenden Graphen: Für jedes Element in der Gruppe G setzen Sie einen Punkt und Sie kleben eine Kante zwischen g und gx_i für jeden Erzeuger x_i. Der entstehende Graph heißt *Cayley Graph der Gruppe G*, C_G.

Klebt man jetzt für jede Relation r_j eine 2-Scheibe ein, so erhält man einen Raum, $\widetilde{X}_G$. Lassen Sie G auf $\widetilde{X}_G$ operieren, indem Sie für ein $g \in G$ einen Punkt g' auf gg' abbilden, eine Kante zwischen g' und $g'x_i$ auf die Kante zwischen gg' und $gg'x_i$ schicken.
a) Zeigen Sie, dass diese Operation wohldefiniert auf ganz $\widetilde{X}_G$ fortgesetzt werden kann.
b) Beweisen Sie, dass diese Operation eine Überlagerung $\widetilde{X}_G \to \widetilde{X}_G/G$ ergibt.