Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2024/25

Blatt 11 Abgabetermin: 17.01.2025, 15:45h in H5

(1) (Stetigkeit von Homomorphismen) (2 Punkte)
Es seien G und G' topologische Gruppen und $\varphi\colon G \to G'$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass φ genau dann stetig ist, falls es im neutralen Element, $1 = 1_G$, stetig ist.

(2) (Matrizengruppen) (2 + 3 Punkte)
a) Wir hatten in der Vorlesung die Operation der $SL_2(\mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}$ besprochen. Bestimmen Sie den Stabilisator von $i \in \mathcal{H}$ unter $SL_2(\mathbb{R})$.
b) Es sei $\mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$ der Raum der symmetrischen $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen. Die Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$ operiert auf $\mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$ durch

$$GL_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R}), \quad (A, B) \mapsto ABA^t.$$

Hierbei bezeichnet A^t die zu A transponierte Matrix. Benutzen Sie Lineare Algebra (Trägheitssatz von Sylvester), um den Quotienten $\mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{R})$ zu beschreiben.

(3) (Fixpunkte und Orbits) (2 + 2 + 2 Punkte)
Es sei X ein G-Raum. Für eine Untergruppe $H < G$ sei X^H der Unterraum der Fixpunkte der H-Operation, also $X^H = \{x \in X \mid hx = x \text{ für alle } h \in H\}$. Zeigen Sie:
a) Ist X hausdorffsch, so ist X^H abgeschlossen für alle Untergruppen H von G.

Es sei G eine topologische Gruppe und $H < G$ eine beliebige Untergruppe.
b) Beweisen Sie, dass der Raum G/H genau dann hausdorffsch ist, wenn H in G abgeschlossen ist.
c) Zeigen Sie, dass G/H genau dann diskret ist, wenn H offen ist.

(4) (Brieskorn-Mannigfaltigkeiten) (4 Punkte)
Es sei $W_d^{2n-1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ für $d, n \geqslant 2$ der Unterraum, der definiert ist als Menge aller $(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, die den beiden Gleichungen

$$z_0^d + z_1^2 + \ldots + z_n^2 = 0 \text{ und } |z_0|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 2$$

genügen. Zeigen Sie, dass W_d^{2n-1} ein $O(n)$-Raum ist, wenn man $O(n)$ durch gewöhnliche Matrizenmultiplikation auf $(z_1, \ldots, z_n)$ operieren lässt.
Zur Allgemeinbildung: Brieskorn-Mannigfaltigkeiten sind Beispiele sogenannter *exotischer Sphären*. Für ungerade d und n ist W_d^{2n-1} homöomorph zu $\mathbb{S}^{2n-1}$, aber nicht immer diffeomorph zu $\mathbb{S}^{2n-1}$.
Zu Egbert Brieskorn: `https://de.wikipedia.org/wiki/Egbert_Brieskorn`