Präsenzaufgaben Topologie, Birgit Richter, WiSe 24/25

(25) Was ist die universelle Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$?

(24) Es sei X ein G-Raum und für eine Untergruppe $H < G$ sei $X^H = \{x \in X \mid h.x = x \text{ für alle } h \in H\}$ sei die Menge der Fixpunkte. Sind H und K Untergruppen von G, so ist $X^H \cap X^K$ wiederum Fixpunktmenge einer geeigneten Untergruppe von G. Welcher?

(23) Geben Sie drei verschiedene Präsentierungen der Gruppe Σ_3 an.

(22) Eine Untergruppe H einer topologischen Gruppe G ist ein Unterraum $H \subset G$, der eine Untergruppe ist. Zeigen Sie:

Ist H eine Untergruppe einer topologischen Gruppe G, so auch $\overline{H}$. War H normal, so ist auch $\overline{H}$ normal in G.

(21) Wieso kann man die Fundamentalgruppe der Kreislinie $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ nicht mit dem Satz von Seifert-van Kampen berechnen, indem man die beiden Hemisphären mit einem kleinen ε-Kragen als X_1, X_2 betrachtet?

(20) Es sei $G = \Sigma_3$. Was ist der Normalteiler, der von der Transposition $(1,2)$ erzeugt wird? Welcher wird vom 3-Zykel $(1,2,3)$ erzeugt?

(19) Es sei $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Ist f dann immer injektiv?

(18) Entfernen Sie einen Punkt aus einem 2-Torus. Zeigen Sie, dass der entstandene Raum homotopieäquivalent zu $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ ist. Erhalten Sie bis auf Homotopieäquivalenz den gleichen Raum, wenn Sie einen Punkt aus der Kleinschen Flasche stanzen? Was passiert bei der Narrenkappe?

(17) Zeigen Sie, dass die p-adischen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ für jede Primzahl p kompakt sind.

(16) Was ist der inverse Limes des inversen Systems, bei dem alle Y_i für $i \in \mathbb{N}$ mit der gewöhnlichen Ordnung gleich $\mathbb{Z}$ sind und alle Abbildungen zwischen Nachbarn sind die Multiplikation mit einer Primzahl p?

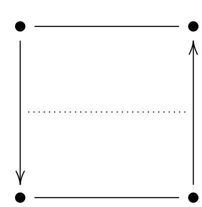
$$\mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot p} \mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot p} \mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot p} \mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot p} \ldots$$

(15) Finden Sie Beispiele direkter Systeme topologischer Räume $\mathcal{X}$, bei denen jedes X_i kompakt ist, aber $\varinjlim \mathcal{X}$ ist nicht kompakt.

(14) Es seien X und Y Mengen, F ein Ultrafilter auf X und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass der Bildfilter $f(F)$ wieder ein Ultrafilter ist.

(13) Zeigen Sie, dass der Filter mit Basis $\mathcal{B} = \{(a, \infty), a \in \mathbb{R}\}$ keinen Berührpunkt hat.

(12) Schneiden Sie ein Möbiusband in der Mitte durch wie unten in der Skizze. Ist das Resultat zusammenhängend?



Was passiert, wenn Sie jetzt noch einmal in der Mitte durchschneiden?

(11) Es sei $Y \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$Y := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \geq 4\}.$$

Skizzieren Sie diese Teilmenge und entscheiden Sie, ob Y zusammenhängend ist. Beweisen Sie Ihre Antwort.

(10) Es sei $Y_i \subset X_i$ für $i \in I$, wobei jedes X_i ein topologischer Raum ist. Wir statten $\prod_{i \in I} X_i$ mit der Produkttopologie aus. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\overline{\prod_{i \in I} Y_i} = \prod_{i \in I} \overline{Y_i}.$$

Wieso beschreibt das nicht den Abschluss einer beliebigen Teilmenge $Y \subset \prod_{i \in I} X_i$?

(9) Betrachten Sie die serifenfreie Version der deutschen Großbuchstaben:

$$\mathsf{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.}$$

Welche Buchstaben sind homöomorph zum J? Welche zum Y? Wie viele Homöomorphieklassen gibt es?

(8) Ich hatte ja gesagt, dass es noch viel mehr Trennungsaxiome gibt, als T_1 bis T_4 und wir werden wirklich nicht alle behandeln, aber: Man nennt einen Raum *Kolmogorov-Raum*, wenn er T_0 erfüllt und das ist:

$$T_0 : \forall\, x, y \in X, x \neq y\, \exists\, O \in \mathcal{T} : x \in O, y \notin O \text{ oder } x \notin O, y \in O.$$

Wir betrachten $X = [-1, 1]$ mit der *überlappenden Intervall-Topologie*. Diese Topologie $\mathcal{T}$ ist erzeugt von den Mengen der Form

$$[-1, b), b > 0 \text{ und } (a, 1], a < 0.$$

Zeigen Sie, dass X zwar T_0 ist aber nicht T_1. (Falls Sie immer noch nicht genug haben: T_4 ist er auch nicht.)

(7) Es sei $X = \{a, b, c, d\}$ vier-elementig und

$$\mathcal{T} := \{\varnothing, \{d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, X\}.$$

Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{T})$ T_4 erfüllt.

Beweisen Sie, dass $Y \subset X$, $Y := \{b, c, d\}$ mit der Unterraumtopologie dagegen nicht T_4 ist. Die Voraussetzung, dass der Unterraum abgeschlossen ist in X in Satz 6.6 (b) war also nötig.

(6) Die *Paris-Metrik* oder *französische Eisenbahnmetrik* ist wie folgt definiert: Es sei $X \subset \mathbb{R}^2$ und $P \in X$. Wir setzen

$$d_P(x, y) := \begin{cases} ||x - y||, & \text{falls } x, y \text{ auf einer Geraden durch } P \text{ liegen,} \\ ||x - P|| + ||P - y||, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie sehen offene 1-Scheiben um P, $B_1(P)$ aus? Was passiert für andere $x \in X$? Wie kann dann $B_1(x)$ aussehen?

(5) Betrachten Sie die Teilmenge $B = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$. Ist B nirgends dicht? Was ist mit $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$?

(4) Es sei $X = \{a, b, c, d, e\}$ und $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, X\}$.
Weisen Sie nach, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie ist.
Was sind die abgeschlossenen Mengen?
Was ist der Abschluss von $\{b\}$, $\{b, d\}$ und $\{a, c\}$?
Was sind die inneren Punkte von $\{b, c, d\}$? Was ist der Rand von $\{b, c, d\}$?
Gibt es dichte oder nirgends-dichte Teilmengen?

(3) Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Zeigen Sie, dass $\{x\}$ abgeschlossen ist.

(2) Zeigen Sie, dass eine Metrik d äquivalent ist zu d' mit $d' = \frac{d}{1+d}$.

(1) Zeigen Sie

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$
$$(A \overset{\circ}{\cap} B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}.$$

Geben Sie Beispiele für $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ und $(A \overset{\circ}{\cup} B) \neq \mathring{A} \cup \mathring{B}$ an.