Gleichungen 5. Grades

Birgit Richter

Nacht des Wissens 2013

Was sind Gleichungen 5. Grades?

Was sind Gleichungen 5. Grades?

Gesucht sind Lösungen für Gleichungen der Form

Was sind Gleichungen 5. Grades?

Gesucht sind Lösungen für Gleichungen der Form

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

wobei a, b, c, d, e rationale Zahlen sind, also zum Beispiel

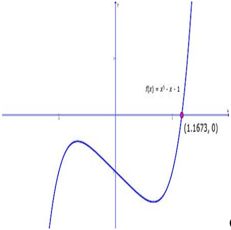
Was sind Gleichungen 5. Grades?

Gesucht sind Lösungen für Gleichungen der Form

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

wobei a, b, c, d, e rationale Zahlen sind, also zum Beispiel

$$x^5 - x - 1 = 0, \qquad (a = b = c = 0, d = e = -1).$$



Quelle: Wikipedia.

Form der Lösung

Form der Lösung

Wir wollen die Lösungen direkt aus den Zahlen a, b, c, d, e ablesen können:

Form der Lösung

Wir wollen die Lösungen direkt aus den Zahlen a, b, c, d, e ablesen können:
Wir möchten nur die Grundrechenarten und (iterierte, höhere) Wurzeln benutzen, um die Lösungen aus den Koeffizienten zu konstruieren.

Form der Lösung

Wir wollen die Lösungen direkt aus den Zahlen a, b, c, d, e ablesen können:
Wir möchten nur die Grundrechenarten und (iterierte, höhere) Wurzeln benutzen, um die Lösungen aus den Koeffizienten zu konstruieren.
Geht das immer?

Form der Lösung

Wir wollen die Lösungen direkt aus den Zahlen a, b, c, d, e ablesen können:
Wir möchten nur die Grundrechenarten und (iterierte, höhere) Wurzeln benutzen, um die Lösungen aus den Koeffizienten zu konstruieren.
Geht das immer?
Manchmal findet man solche Lösungen. Für $x^5 - 5x + 12 = 0$ ist eine Lösung zum Beispiel

Form der Lösung

Wir wollen die Lösungen direkt aus den Zahlen a, b, c, d, e ablesen können:

Wir möchten nur die Grundrechenarten und (iterierte, höhere) Wurzeln benutzen, um die Lösungen aus den Koeffizienten zu konstruieren.

Geht das immer?

Manchmal findet man solche Lösungen. Für $x^5 - 5x + 12 = 0$ ist eine Lösung zum Beispiel

$$\sqrt[5]{-1 + \frac{2}{5}\sqrt{5} - 3\sqrt{\frac{1}{5} - \frac{11}{125}\sqrt{5}}} + \sqrt[5]{-1 - \frac{2}{5}\sqrt{5} + 3\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{11}{125}\sqrt{5}}}$$
$$+ \sqrt[5]{-1 - \frac{2}{5}\sqrt{5} - 3\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{11}{125}\sqrt{5}}} + \sqrt[5]{-1 + \frac{2}{5}\sqrt{5} + 3\sqrt{\frac{1}{5} - \frac{11}{125}\sqrt{5}}}.$$

Form der Lösung

Wir wollen die Lösungen direkt aus den Zahlen a, b, c, d, e ablesen können:
Wir möchten nur die Grundrechenarten und (iterierte, höhere) Wurzeln benutzen, um die Lösungen aus den Koeffizienten zu konstruieren.
Geht das immer?
Manchmal findet man solche Lösungen. Für $x^5 - 5x + 12 = 0$ ist eine Lösung zum Beispiel

$$\sqrt[5]{-1 + \frac{2}{5}\sqrt{5} - 3\sqrt{\frac{1}{5} - \frac{11}{125}\sqrt{5}}} + \sqrt[5]{-1 - \frac{2}{5}\sqrt{5} + 3\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{11}{125}\sqrt{5}}}$$
$$+ \sqrt[5]{-1 - \frac{2}{5}\sqrt{5} - 3\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{11}{125}\sqrt{5}}} + \sqrt[5]{-1 + \frac{2}{5}\sqrt{5} + 3\sqrt{\frac{1}{5} - \frac{11}{125}\sqrt{5}}}.$$

Fangen wir mit einfacheren Fällen an...

Gleichungen zweiten Grades

Gleichungen zweiten Grades

Sind quadratische Gleichungen immer lösbar?

Gleichungen zweiten Grades

Sind quadratische Gleichungen immer lösbar?

$$x^2 + ax + b = 0$$

hat die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Gleichungen zweiten Grades

Sind quadratische Gleichungen immer lösbar?

$$x^2 + ax + b = 0$$

hat die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Immer?

Gleichungen zweiten Grades

Sind quadratische Gleichungen immer lösbar?

$$x^2 + ax + b = 0$$

hat die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Immer?
Was ist mit $x^2 + 1 = 0$? Dafür müßte es ein x geben mit $x^2 = -1$.

Gleichungen zweiten Grades

Sind quadratische Gleichungen immer lösbar?

$$x^2 + ax + b = 0$$

hat die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

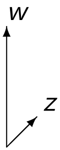
Immer?
Was ist mit $x^2 + 1 = 0$? Dafür müßte es ein x geben mit $x^2 = -1$.
Gibt es! Wir erweitern den Zahlbereich und rechnen mit der Zahlenebene, mit den sogenannten komplexen Zahlen.

Komplexe Zahlen

Es seien z und w zwei Elemente in der Zahlenebene:

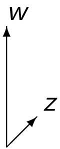
Komplexe Zahlen

Es seien z und w zwei Elemente in der Zahlenebene:



Komplexe Zahlen

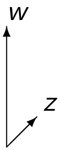
Es seien z und w zwei Elemente in der Zahlenebene:



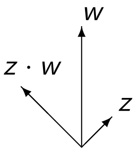
Wir multiplizieren z und w, indem wir die Winkel addieren und die Längen multiplizieren.

Komplexe Zahlen

Es seien z und w zwei Elemente in der Zahlenebene:



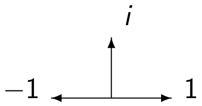
Wir multiplizieren z und w, indem wir die Winkel addieren und die Längen multiplizieren.



Die imaginäre Einheit i

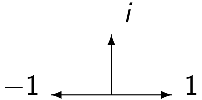
Die imaginäre Einheit i

Wir setzen $i = (0, 1)$. Die Länge von i ist 1 und der Winkel entspricht 90 Grad.



Die imaginäre Einheit i

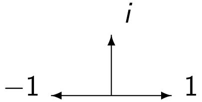
Wir setzen $i = (0, 1)$. Die Länge von i ist 1 und der Winkel entspricht 90 Grad.



Multiplizieren wir i mit sich selbst, so erhalten wir ein Element der Länge 1 und mit einem Winkel von 180 Grad. Damit ist $i^2 = -1$.

Die imaginäre Einheit i

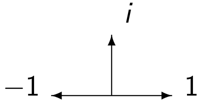
Wir setzen $i = (0, 1)$. Die Länge von i ist 1 und der Winkel entspricht 90 Grad.



Multiplizieren wir i mit sich selbst, so erhalten wir ein Element der Länge 1 und mit einem Winkel von 180 Grad. Damit ist $i^2 = -1$. Mit diesem Trick sind *alle* quadratischen Gleichungen lösbar mit Wurzelausdrücken!

Die imaginäre Einheit i

Wir setzen $i = (0, 1)$. Die Länge von i ist 1 und der Winkel entspricht 90 Grad.



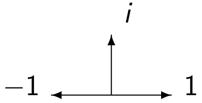
Multiplizieren wir i mit sich selbst, so erhalten wir ein Element der Länge 1 und mit einem Winkel von 180 Grad. Damit ist $i^2 = -1$.
Mit diesem Trick sind *alle* quadratischen Gleichungen lösbar mit Wurzelausdrücken!
Damit finden wir sogar für *jede* Gleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

genau n Lösungen.

Die imaginäre Einheit i

Wir setzen $i = (0, 1)$. Die Länge von i ist 1 und der Winkel entspricht 90 Grad.



Multiplizieren wir i mit sich selbst, so erhalten wir ein Element der Länge 1 und mit einem Winkel von 180 Grad. Damit ist $i^2 = -1$.
Mit diesem Trick sind *alle* quadratischen Gleichungen lösbar mit Wurzelausdrücken!
Damit finden wir sogar für *jede* Gleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

genau n Lösungen.
Sind diese Lösungen immer durch Wurzelausdrücke in den Koeffizienten angebbar?

Gleichungen 3. und 4. Grades

Für Gleichungen der Form $x^3 + ax^2 + cx + d = 0$ gibt es immer die gewünschten Lösungen. Cardano (1501-1576) hat dafür explizite Formeln angegeben.

Gleichungen 3. und 4. Grades

Für Gleichungen der Form $x^3 + ax^2 + cx + d = 0$ gibt es immer die gewünschten Lösungen. Cardano (1501-1576) hat dafür explizite Formeln angegeben.
Man kann diese Gleichungen zunächst vereinfachen zu
$x^3 + px + q = 0$.

Gleichungen 3. und 4. Grades

Für Gleichungen der Form $x^3 + ax^2 + cx + d = 0$ gibt es immer die gewünschten Lösungen. Cardano (1501-1576) hat dafür explizite Formeln angegeben.
Man kann diese Gleichungen zunächst vereinfachen zu
$x^3 + px + q = 0$.
Dann ist eine Lösung

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Gleichungen 3. und 4. Grades

Für Gleichungen der Form $x^3 + ax^2 + cx + d = 0$ gibt es immer die gewünschten Lösungen. Cardano (1501-1576) hat dafür explizite Formeln angegeben.
Man kann diese Gleichungen zunächst vereinfachen zu
$x^3 + px + q = 0$.
Dann ist eine Lösung

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

(Man hat Wahlen für die dritten Wurzeln und muss sie so wählen, dass ihr Produkt $-\frac{p}{3}$ ergibt.)

Gleichungen 3. und 4. Grades

Für Gleichungen der Form $x^3 + ax^2 + cx + d = 0$ gibt es immer die gewünschten Lösungen. Cardano (1501-1576) hat dafür explizite Formeln angegeben.
Man kann diese Gleichungen zunächst vereinfachen zu
$x^3 + px + q = 0$.
Dann ist eine Lösung

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

(Man hat Wahlen für die dritten Wurzeln und muss sie so wählen, dass ihr Produkt $-\frac{p}{3}$ ergibt.)
Gleichungen 4. Grades haben ebenfalls *immer* solche Lösungen.

Gleichungen 5. Grades

Für Gleichungen 5. Grades hat man lange nach einer Antwort gesucht.

Gleichungen 5. Grades

Für Gleichungen 5. Grades hat man lange nach einer Antwort gesucht.
Ist das vielleicht zu kompliziert?

Gleichungen 5. Grades

Für Gleichungen 5. Grades hat man lange nach einer Antwort gesucht.
Ist das vielleicht zu kompliziert? Sind wir zu dumm?

Gleichungen 5. Grades

Für Gleichungen 5. Grades hat man lange nach einer Antwort gesucht.
Ist das vielleicht zu kompliziert? Sind wir zu dumm?
Paolo Rufini (Ansatz in 1799), Niels-Henrik Abel (Beweis in 1824)


Niels-Henrik Abel, Quelle: Wikipedia.

Gleichungen 5. Grades

Für Gleichungen 5. Grades hat man lange nach einer Antwort gesucht.
Ist das vielleicht zu kompliziert? Sind wir zu dumm?
Paolo Rufini (Ansatz in 1799), Niels-Henrik Abel (Beweis in 1824)


Niels-Henrik Abel, Quelle: Wikipedia.

Nicht jede Gleichung fünften Grades ist durch Wurzeln lösbar!

Gleichungen 5. Grades

Für Gleichungen 5. Grades hat man lange nach einer Antwort gesucht.
Ist das vielleicht zu kompliziert? Sind wir zu dumm?
Paolo Rufini (Ansatz in 1799), Niels-Henrik Abel (Beweis in 1824)


Niels-Henrik Abel, Quelle: Wikipedia.

Nicht jede Gleichung fünften Grades ist durch Wurzeln lösbar!

Zum Beispiel ist $x^5 - x + 1 = 0$ so nicht lösbar. Das heißt, dass wir nicht zu dumm sind – es geht nicht.

Mathematischer Hintergrund

Mathematischer Hintergrund

Systematische Untersuchung: Wie konstruiere ich Lösungen?

Mathematischer Hintergrund

Systematische Untersuchung: Wie konstruiere ich Lösungen?
Heute: Zweig der Galoistheorie (Évariste Galois (1811-1832)).

Évariste Galois, Quelle: Wikipedia.

Mathematischer Hintergrund

Systematische Untersuchung: Wie konstruiere ich Lösungen?
Heute: Zweig der Galoistheorie (Évariste Galois (1811-1832)).

Évariste Galois, Quelle: Wikipedia.

Die Lösungen haben Symmetrien. Dabei kann bei Gleichungen fünften Grades die Symmetriegruppe des Ikosaeders auftreten.

Mathematischer Hintergrund

Systematische Untersuchung: Wie konstruiere ich Lösungen?
Heute: Zweig der Galoistheorie (Évariste Galois (1811-1832)).

Évariste Galois, Quelle: Wikipedia.

Die Lösungen haben Symmetrien. Dabei kann bei Gleichungen fünften Grades die Symmetriegruppe des Ikosaeders auftreten. Diese Gruppe ist nicht 'auflösbar' und das verhindert die Existenz von Wurzellösungen.

Mathematischer Hintergrund

Systematische Untersuchung: Wie konstruiere ich Lösungen?
Heute: Zweig der Galoistheorie (Évariste Galois (1811-1832)).

Évariste Galois, Quelle: Wikipedia.

Die Lösungen haben Symmetrien. Dabei kann bei Gleichungen fünften Grades die Symmetriegruppe des Ikosaeders auftreten. Diese Gruppe ist nicht 'auflösbar' und das verhindert die Existenz von Wurzellösungen.
Das ist Stoff des 5./6. Semesters eines Mathematikstudiums...