Grundlagen der Mathematik

Die mündliche Prüfung

Allgemeine Hinweise

Die mündlichen Prüfung ist idealerweise ein flüssiges Gespräch, wobei (kurzes) Nachdenken natürlich jederzeit erlaubt ist. Sie dauert zwischen 20 und 25 Minuten.

Die unten stehende Liste enthält sechs Themen-Blöcke, von denen drei mit einem * gekennzeichnet sind. Die Prüfung beginnt typischerweise mit der Nennung eines Themas aus einem dieser drei Blöcke. Sie können dann selbstständig Ihr Wissen über dieses Thema darlegen, wobei sich meist Zwischenfragen ergeben werden. Ihnen steht Schreibmaterial zur Verfügung, so dass Sie Wichtiges aufschreiben können. Manchmal können auch Skizzen eine Erklärung unterstützen.

Die weiteren Themen der Prüfung können allen Blöcken entstammen. Spätestens nach etwa der Hälfte der Zeit wird das Thema gewechselt. Das kann sich organisch durch den Verlauf des Prüfungsgesprächs ergeben, oder durch Intervention der Prüfenden. Je nach Verlauf der Prüfung sind auch mehrere Themenwechsel möglich.

Der Fragenkatalog ist exemplarisch zu verstehen. Natürlich werden in der Prüfung auch Fragen gestellt, die nicht oder in anderer Formulierung im Katalog stehen.

Auf jeden Fall sollten Sie zu den angegebenen Themen Definitionen, wichtige Sätze und Beispiele/Gegenbeispiele nennen sowie einfache Zusammenhänger erläutern können. Folgen Sie bei Ihren Ausführungen der Regel: *das Wichtige zuerst.*

Sie sollen auch einfache Beweise führen. Hier gilt: einerseits sollen Sie die Beweisidee kommunizieren können, andererseits sollten Sie aber auch einfache Schritte formal korrekt formulieren/aufschreiben können!

Zusammenfassung: *Nutzen Sie die (sehr kurze) Ihnen während der Prüfung zur Verfügung stehende Zeit, um uns so gut wie möglich von Ihrer Beherrschung des Stoffes zu überzeugen!*

Kriterien bei der Bewertung

- Inhaltlich korrekte und präzise Ausführungen zu den vorgegebenen Themen
- Beherrschung des Formalismus
- Beherrschung der Beweisführung
- Fähigkeit zum Transfer/zur Herstellung von Zusammenhängen

1 Mengen und Aussagen

Grundbegriffe

- Menge, Element, Teilmenge, leere Menge
- Welche Verknüpfungen für Mengen gibt es?
- Welche Rechenregeln gelten dabei? (einige Regeln nennen)
- all dies analog für Aussagen
- Lesen Sie vor: $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$
- Ist dies eine wahre Aussage? (Notfalls Hilfe: Stellen Sie eine Wahrheitstafel auf)
- Was bedeutet diese Aussage? (Kontraposition)
- Lesen Sie vor: $(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$
- Ist dies eine wahre Aussage? (Notfalls Hilfe: Stellen Sie eine Wahrheitstafel auf)
- Wie lautet eine zu der Aussage $\neg(A \implies B)$ äquivalente Aussage, die oft in Widerspruchsbeweisen verwendet wird?
- Was ist eine Aussageform?
- Was ist eine Allaussage, eine Existenzaussage? Was ist ihre Negation? Erläutern Sie dies an einem Beispiel.
- Wie kann man Mengen aufschreiben? (aufzählend / mit Aussageform)
- Bestimmen Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 4\}$
- Was ist die Potenzmenge einer Menge? Was ist $\mathcal{P}(\varnothing)$?
- Was ist das kartesische Produkt zweier Mengen?
- Erläutern Sie die Analogie zwischen Aussagen und Mengen. Welche Gründe gibt es dafür?

Beweismethoden

- Wie funktioniert ein
  – direkter Beweis?
  – Widerspruchsbeweis?
  – Beweis durch Kontraposition?
  – Induktionsbeweis?
- Welche Rolle spielen Tautologien in Beweisen?

2 * Abbildungen

Grundbegriffe

- Grundlegende Begriffe: Abbildung, Definitionsbereich, Wertebereich, Bild
- Welche Darstellungsformen kennen Sie (Abbildungsvorschrift, Wertetabelle, Pfeildiagramm...)
- Was ist der Graph einer Abbildung $f : A \to B$?
- Skizze in $\mathbb{R}^2$: Ist das der Graph einer Abbildung?
- Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^2 + 2x$ definiert.
  Bestimmen Sie $f(-1)$ und $f(a-1)$ (wobei $a \in \mathbb{R}$ beliebig sei). Auch Skizze, ...
- Setzen Sie $x + h$ in $f(x) = x^2 - x$ ein und vereinfachen Sie.
- Ist dies eine Abbildung? (PrüferIn zeichnet Pfeildiagramm) Warum/warum nicht?
- Lesen Sie vor: $\forall\, b \in B\, \exists\, a \in A\colon\ f(a) = b$.
  Was bedeutet diese Aussage für $f\colon A \to B$?
- Formulieren Sie die Definition des Begriffs „injektiv“.
- Formulieren Sie die Kontraposition dieser Definition
- Definieren Sie surjektiv.
- Beispiele und Visualisierung mit reellen Funktionen
- Geben Sie ein Beispiel einer injektiven, nicht surjektiven Abbildung! (z.B. Pfeildiagramm, Wertetabelle, oder Graph einer reellen F.)
- Geben Sie ein Beispiel einer surjektiven, nicht injektiven Abbildung! (z.B. Pfeildiagramm, Wertetabelle oder Graph einer reellen F.)
- Was ist der Unterschied zwischen nicht injektiv und surjektiv?
- Urbild: Definieren Sie $f^{-1}(M)$ für eine Abbildung $f : A \to B$; $M \subseteq B$
- Beweis $f(f^{-1}(M)) \subseteq M$

Verkettung, Umkehrbarkeit

- Wann existiert $f \circ g$ und wie ist es definiert? (Verkettung — Komposition)
- Warum ist dies eine Abbildung?
- Beispiele
- Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^2 + 2x$ und $g(x) := x^{-1}$ definiert. Bestimmen Sie $f \circ g(-1)$.
- Ist die Verkettung von Abbildungen kommutativ? mit Begründung
- Was ist die Identität? Wie ist ihr Verhalten bei Verkettung?
- Wie übertragen sich Eigenschaften von f und g auf $f \circ g$?
- Was ist die Umkehrfunktion (inverse Abb.) einer Abbildung? Wann existiert sie?
- Wie beschreibt man die Umkehrfunktion für reelle Funktionen graphisch?
- Verhalten bei Verkettung
- Assoziativität der Verkettung mit Beweis
- Beweis bijektiv $\iff$ es ex. Umkehrabbildung

Kardinalität und Abzählbarkeit

- Definition „gleichmächtig“
- Beispiele für gleichmächtige — ungleichmächtige Mengen
- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0|$ mit Beweis
- Definition (endlich,) abzählbar unendlich, überabzählbar unendlich;
  Beispiele nennen
- A, B endlich; wann existieren injektive / surjektive Abb. $A \to B$?
  Beweisidee (z.B. Pfeildiagramm)
- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ mit Beweis
- Erläuterungen zum Beweis $\mathbb{Q}$ ist abzählbar und $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.
- Was können Sie über die Mächtigkeit $|\mathbb{N}^2|$ sagen?
- Vergleich der Mächtigkeit: Potenzmenge vs. Ausgangsmenge)

3 * Natürliche Zahlen

Grundbegriffe

- Peano Axiome:

  Die natürlichen Zahlen sind eine Menge $\mathbb{N}$ mit einem ausgezeichneten Element $1 \in \mathbb{N}$ und einer Abb. $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass ...

- Anschauliche Erläuterungen zur Abbildung S
- Definition von $+$ und $<$
- Eigenschaften von $+$, $\cdot$ und $<$
- Wie beweist man die Eigenschaften von $+$? (Methode/Idee)
- Definition von „$\cdot$“
- Beweis der Transitivität von $<$
- Geben Sie ein Beispiel für eine Abbildung $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die ein Peanoaxiom nicht erfüllt (z.B. das Induktionsaxiom — evtl. nur Skizze der Bahn)

Induktion

- Formulieren Sie das Prinzip der vollständigen Induktion
- Bsp. Induktionsbeweis für $1 + 2 + \cdots + n = \ldots$ o.ä.
- Zusammenhang Induktionsaxiom — Induktionsbeweis
- Beweis $n < 2^n$
- Beweis der geometrischen Summenformel (unter Anleitung!)
- Binomialkoeffizienten: Definition, Bedeutung? (Zählprobleme)
- Was sagt der allgemeine binomische Lehrsatz?
- Beweis?

Stellenwertsysteme

- Division mit Rest
- b-adische Darstellung — was ist das?
- Wie findet man die zu einer gegebenen Zahl $n \in \mathbb{N}$?
- Beweis Eindeutigkeit
- Rechnen im Stellenwertsystem zur Basis 2

4 Die ganzen und die rationalen Zahlen

Notwendige Grundbegriffe

- Was ist eine Halbgruppe? eine Gruppe? Beispiele?
- Beweis: Eindeutigkeit des neutralen Elements
- Beweis: Eindeutigkeit des inversen Elements
- Beispiele für (Halb-)Gruppe, evtl. Verknüpfungstafel
- Eigenschaften von $(\mathcal{P}(X), \cap)$ oder $(\mathcal{P}(X), \cup)$,
- Relationen: Definition? Beispiele?
- Eigenschaften von Relationen, Beispiele
- Ordnungsrelation, Äquivalenzrelation: Definitionen, Beispiele

Konstruktion

- Konstruktion der Menge P der positiven Bruchzahlen aus $\mathbb{N}$
- Definition/Eigenschaften von $+$, $\cdot$ und $<$ auf P
- Was heißt in diesem Zusammenhang „wohldefiniert “?
- Gemeinsamkeiten mit der Konstruktion von $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$ und der Konstruktion von $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$ oder P.
- Eigenschaften eines Ringes; evtl. am Bsp. $\mathbb{Z}$. Weitere Beispiele?
- Welche Elemente aus $\mathbb{Z}$ sind bezüglich Addition/Multiplikation invertierbar?
- Was folgt (in $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$) aus $a \cdot b = 0$? — Antwort: $a = 0 \vee b = 0$
- Gilt das in jedem Ring?
- Definition (angeordneter) Körper, Beispiele (neben $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$)?

5 * Elementare Zahlentheorie

- Definition „Teiler“
- einfache Eigenschaften der Relation „teilt“ formulieren; z.B. $a|b \wedge a|c \implies a|(b+c)$
- einfache Eigenschaften von „teilt“ beweisen; z.B. transitiv; $a|b \wedge b|c \implies a|c$
- Wahr oder falsch? $7|(-14)$, $(-6)|3$, $0|7$, $7|0$ o.ä.

- Definition „Primzahl“
- Wie viele Primzahlen gibt es?
- Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen
- Warum ist für jede natürliche Zahl ≥ 2 der kleinste Teiler > 1 eine Primzahl?
- Warum besitzt jede natürliche Zahl ≥ 2 einen Primteiler?
- Was ist das Sieb des Erathostenes?
- Hauptsatz der Arithmetik (Primfaktorzerlegung: PFZ) formulieren
- Beweisidee für beide Teile
- Was sagt das Lemma von Euklid? Wo braucht man das?
- Bestimmen Sie die PFZ von 360 o.ä.
- Beweisen Sie: $\quad \forall n \in \mathbb{N} : 3|10^n - 1$
- Definieren Sie ggT, kgV
- Bestimmen Sie, sofern möglich, folgende Ausdrücke:
  $\mathrm{ggT}(24, 18)$, $\mathrm{ggT}(24, 0)$, $\mathrm{ggT}(0, 0)$, $\mathrm{ggT}(12, 9, 18)$; $\mathrm{kgV}(14, 21)$, $\mathrm{kgV}(0, 0)$ o.ä.
- Wie kann man allgemein $\mathrm{ggT}(x, y)$ bestimmen?
- Beweis $x = qy + r \implies \mathrm{ggT}(x, y) = \mathrm{ggT}(y, r)$ — Zsh. mit Euklidischem Algorithmus
- Darstellung $\mathrm{ggT}(x, y) = ax + by$ mit Beweisidee

6 Die reellen Zahlen

- Axiome — Unterschied zu $\mathbb{Q}$
- Absolutbetrag: Definition, Eigenschaften und Beweise
- Bestimmen Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 4\}$ o.ä.
- Begründen Sie die Identität $|a - b| = |b - a|$; was bedeuten diese Ausdrücke anschaulich?
- Wie ist die Quadratwurzel definiert? Andere Wurzeln?
- Für welche reellen Zahlen existiert sie?
- Wie beweist man das (Idee)?
- Ist sie eindeutig? Warum?