Universität Hamburg Topologie Winter 2013/14
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Übungsstunde 9

1. Sei A eine reelle 3×3-Matrix mit positiven Einträgen. Zeigen Sie, dass A einen positiven reellen Eigenwert besitzt!
Hinweis: Führen Sie das Resultat auf den Brouwerschen Fixpunktsatz zurück!

2. In der Vorlesung wurde bewiesen, dass für jede Überdeckung von S^2 durch drei abgeschlossene Teilmengen mindestens eine dieser Teilmengen zwei gegenüberliegende Punkte enthält. Zeigen Sie, dass die analoge Aussage mit vier Mengen falsch ist!

3. Wir betrachten den Raum

$$\widetilde{C^k}(\mathbb{R}^n) := \{(x_1, \ldots, x_k) \in (\mathbb{R}^n)^k \mid x_i \neq x_j \text{falls } i \neq j\}$$

von geordneten k-Tupeln paarweise verschiedener Punkte im $\mathbb{R}^n$, mit der vom Produkt induzierten Teilraumtopologie.

a) Können Sie die Fundamentalgruppe für $n = 2$ anschaulich beschreiben?

b) Finden Sie ein passendes Erzeugendensystem, und versuchen Sie Relationen zu beschreiben!

c) Sind die auftretenden Gruppen abelsch? Sind sie endlich oder unendlich?

d) Welche Gruppe erhält man für $k = 2$?

e) Was ändert sich, wenn man stattdessen die Reihenfolge der Punkte ignoriert, d.h. wenn man den Konfigurationsraum

$$C^k(\mathbb{R}^n) := \{M \subset \mathbb{R}^n \,:\, |M| = k\}$$

aller k-Tupel von (ungeordneten) Punkten im $\mathbb{R}^2$ betrachtet?

Emil Artin (1898-1962), damals Professor an der Universität Hamburg, hat die Zopfgruppen 1925 in einer Arbeit mit dem Titel „Theorie der Zöpfe” eingehend studiert. Die hier beschriebene Definition als Fundamentalgruppen der Konfigurationsräume $C^k(\mathbb{R}^2)$ tauchte bereits in einer Arbeit von Adolf Hurwitz über Riemannsche Flächen aus dem Jahre 1891 auf.

Am letzten Mittwoch wurde übrigens im Emil-Artin-Hörsaal im Hauptgebäude unserer Universität eine Lebendmaske dieses Mathematikers aufgestellt, welche Mitte der dreißiger Jahre des letzten Jahrhunderts angefertigt wurde.