Universität Hamburg Topologie Winter 2013/14
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Übungsstunde 6

1. Zeigen Sie:

a) Eine abgeschlossene Teilmenge eines normalen Raumes ist mit der Teilraumtopologie selbst normal.

b) In einem lokal kompakten Hausdorff-Raum enthält jede Umgebung U eines Punktes $x \in X$ eine Umgebung V von x, so dass $\overline{V}$ kompakt und in U enthalten ist. Insbesondere ist ein lokal kompakter Hausdorff-Raum regulär (warum?).

2. Zeigen Sie folgende Kriterien für die Hausdorff-Eigenschaft von Quotientenräumen:

a) Ist X regulär und $A \subset X$ eine Teilmenge, so ist der Quotientenraum X/A genau dann Hausdorffsch, wenn A abgeschlossen ist.

b) Ist X normal und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, so ist der Quotientenraum $X/\sim$ genau dann Hausdorffsch, wenn alle Äquivalenzklassen abgeschlossene Teilmengen von X sind.

3. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G mit einer Topologie, so dass die Gruppenoperationen (Multiplikation, Inversenbildung) stetig sind. Eine *topologische Gruppenwirkung* von G auf einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung

$$\mu : G \times X \to X$$

so dass $\mu(e, x) = x$ für alle $x \in X$ und $\mu(g_1, \mu(g_2, x)) = \mu(g_1 \cdot g_2, x)$ für alle $g_1, g_2 \in G$ und $x \in X$.
Überzeugen Sie sich, dass die folgenden Gruppenwirkungen topologisch sind, und entscheiden Sie jeweils, ob der Quotientenraum Hausdorffsch ist:

a) $(\mathbb{R}, +)$ wirkt auf $\mathbb{C}$ durch $\mu(t, z) = e^{\mathbf{i}t} z$.

b) S^1 wirkt auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ durch $\mu(e^{\mathbf{i}\varphi}, (x + \mathbf{i}y, z)) = (e^{\mathbf{i}\varphi}(x + \mathbf{i}y), z)$.

c) $(\mathbb{R}, +)$ wirkt auf $\mathbb{R}^2$ durch $\mu(t, (x, y)) = (e^t x, e^{-t} y)$.

d) $(\mathbb{R}, +)$ wirkt auf $S^1 \times S^1$ durch $\mu(t, (e^{\mathbf{i}\varphi}, e^{\mathbf{i}\psi})) = (e^{\mathbf{i}(\varphi + t)}, e^{\mathbf{i}(\psi + \alpha t)})$, wobei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

e) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ wirkt auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ durch $\mu(t, (x, y)) = (tx, ty)$.