Universität Hamburg
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Topologie

Winter 2013/14

Übungsstunde 4

1. Ein topologischer Raum X ist genau dann Hausdorffsch, wenn die Diagonale

$$\Delta := \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$$

abgeschlossen in $X \times X$ ist.

2. In einem metrischen Raum ist jede kompakte Teilmenge abgeschlossen und beschränkt. Finden Sie einen metrischen Raum X und eine abgeschlossene, beschränkte Teilmenge $A \subset X$, welche nicht kompakt ist!

3. Wir sagen, dass eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten in einem topologischen Raum X gegen den Punkt $a \in X$ konvergiert, wenn es zu jeder offenen Umgebung U von a ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$.

a) Zeigen Sie, dass in einem Hausdorff–Raum jede Folge höchstens einen Grenzwert hat!

b) Untersuchen Sie die Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$ bezüglich der Topologie der endlichen Komplemente!

4. **a)** Jede stetige Bijektion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (bezüglich der Standardtopologie) ein Homöomorphismus.

b) Welche Eigenschaften der Standardtopologie haben Sie in Ihrem Beweis benutzt?