Universität Hamburg
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Topologie

Winter 2013/14

Übungsstunde 2

1. Gruppieren Sie die Großbuchstaben des Alphabets in Homöomorphieklassen, wobei der folgende Font gemeint ist: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

2. Wieviele Mengen kann man *höchstens* aus einer (geeignet ausgewählten) Teilmenge $X \subset (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}})$ durch wiederholte Bildung des Inneren bzw. der abgeschlossenen Hülle generieren? Stellen Sie Vermutungen über das Verhalten der Kompositionen $A \mapsto \operatorname{Int}(\overline{A})$ und $A \mapsto \overline{\operatorname{Int}(A)}$ unter Iteration auf und beweisen Sie diese! Gelten Ihre Vermutungen in beliebigen topologischen Räumen?

3. Sei $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ eine Abbildung zwischen nichtleeren topologischen Räumen. Untersuchen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie Stetigkeit von f impliziert oder aus der Stetigkeit von f folgt.

a) Das Bild jeder offenen Menge ist offen.

b) Jede Menge, deren Bild offen ist, ist selbst offen.

c) Das Bild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.

d) Jede Menge, deren Bild abgeschlossen ist, ist selbst abgeschlossen.

Ändert sich etwas, wenn man zusätzlich annimmt, dass f surjektiv (oder injektiv) ist?

4. Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit der lexikografischen Ordnung und der Ordnungstopologie τ_O.

a) Zeigen Sie, dass die Teilmengen der Form $U_{x;y_1,y_2} := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 < t < y_2\}$ eine Basis für τ_O bilden.

b) Folgern Sie daraus, dass τ_O mit der Produkttopologie auf $(\mathbb{R}, \tau_{\text{diskret}}) \times (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}})$ übereinstimmt, wobei τ_{diskret} die diskrete Topologie und τ_{std} die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ bezeichnet.