Universität Hamburg | Topologie | Winter 2013/14
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Übungsstunde 13

Da in der letzten Übung nicht genug Zeit war, um die letzte Aufgabe in Ruhe zu diskutieren, betrachten wir sie hier noch einmal.

1. Sei $p : E \to B$ eine Überlagerung, und sei $b_0 \in B$ gegeben. Für jede Schleife $\gamma \in \Omega(B; b_0)$ definieren wir eine Abbildung

$$m_\gamma : p^{-1}(b_0) \to p^{-1}(b_0)$$

indem wir jedem Punkt $e \in p^{-1}(b_0)$ den Endpunkt der eindeutigen Hebung $\tilde{\bar{\gamma}}_e$ von $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ mit Startpunkt e zuordnen.

a) Zeigen Sie, dass m_γ eine Bijektion von $p^{-1}(b_0)$ auf sich selbst ist.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} M : \pi_1(B, b_0) &\to \text{Bijektionen}(p^{-1}(b_0)) \\ [\gamma] &\mapsto m_\gamma \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist! Diesen nennt man die *Monodromie* oder den *Fasertransport* der Überlagerung $p : E \to B$.

c) Welche Homomorphismen $\mathbb{Z} \to S_4$ können als Monodromien einer 4-fachen Überlagerung $p : E \to S^1$ auftreten? Beschreiben Sie Vertreter der Äquivalenzklassen der zugehörigen Überlagerungen!

d) Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine polynomiale Abbildung. Was kann man aus der Monodromie um einen kritischen Wert über die Multiplizitäten der Urbilder ablesen? Wie sieht die Monodromie um einen regulären Wert aus?

e) Welche Homomorphismen $F_2 \to S_3$ können als Monodromien einer 3-fachen Überlagerung $p : E \to S^1 \vee S^1$ auftreten? Beschreiben Sie auch hier Vertreter der Äquivalenzklassen der zugehörigen Überlagerungen!

f) Welche dieser Überlagerungen setzen sich zu Überlagerungen des Torus $T^2 \supset S^1 \vee S^1$ fort? Welche zu Überlagerungen der Klein'schen Flasche K^2?

2. Beschreiben Sie alle Äquivalenzklassen von Überlagerungen von S^1 mit zusammenhängendem Totalraum!

3. Beweisen Sie die in der Vorlesung gemachte Behauptung: Ein unendliches Produkt von Kreisen,

$$X = \prod_{\alpha \in A} S^1_\alpha \quad , \quad |A| = \infty,$$

ist in keinem Punkt semi-lokal einfach zusammenhängend.
Bemerkung: Ein anderes(?) Standardbeispiel für einen nicht semilokal einfach zusammenhängenden Raum ist der Hawaii'sche Ohrring.