Universität Hamburg | Topologie | Winter 2013/14
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

# Übungsstunde 12

**1.** Zeigen Sie die in der Vorlesung gemachte Behauptung, dass für eine Überlagerung $p : E \to B$ die induzierten Abbildungen

$$p_\# : \pi_k(E, e_0) \to \pi_k(B, p(e_0))$$

für $k > 1$ Isomorphismen sind!

**2.** Beweisen Sie die in der Vorlesung gemachte Behauptung, dass $p : E \to B$ für zusammenhängende Basis $B$ genau dann normal ist, wenn die Decktransformationen für irgendein $b \in B$ transitiv auf $p^{-1}(b)$ wirken!

**3.** Sei $p : E \to B$ eine Überlagerung, und sei $b_0 \in B$ gegeben. Für jede Schleife $\gamma \in \Omega(B; b_0)$ definieren wir eine Abbildung

$$m_\gamma : p^{-1}(b_0) \to p^{-1}(b_0)$$

indem wir jedem Punkt $e \in p^{-1}(b_0)$ den Endpunkt der eindeutigen Hebung $\tilde{\bar{\gamma}}_e$ von $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ mit Startpunkt $e$ zuordnen.

**a)** Zeigen Sie, dass $m_\gamma$ eine Bijektion von $p^{-1}(b_0)$ auf sich selbst ist.

**b)** Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$M : \pi_1(B, b_0) \to \text{Bijektionen}(p^{-1}(b_0))$$
$$[\gamma] \mapsto m_\gamma$$

ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist! Diesen nennt man die *Monodromie* oder den *Fasertransport* der Überlagerung $p : E \to B$.

**c)** Welche Homomorphismen $\mathbb{Z} \to S_4$ können als Monodromien einer 4-fachen Überlagerung $p : E \to S^1$ auftreten? Beschreiben Sie Vertreter der Äquivalenzklassen der zugehörigen Überlagerungen!

**d)** Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine polynomiale Abbildung. Was kann man aus der Monodromie um einen kritischen Wert über die Multiplizitäten der Urbilder ablesen? Wie sieht die Monodromie um einen regulären Wert aus?

**e)** Welche Homomorphismen $F_2 \to S_3$ können als Monodromien einer 3-fachen Überlagerung $p : E \to S^1 \vee S^1$ auftreten? Beschreiben Sie auch hier Vertreter der Äquivalenzklassen der zugehörigen Überlagerungen!

**f)** Welche dieser Überlagerungen setzen sich zu Überlagerungen des Torus $T^2 \supset S^1 \vee S^1$ fort? Welche zu Überlagerungen der Klein'schen Flasche $K^2$?

*Bemerkung: Für hinreichend "schöne" Basisräume $B$ (zum Beispiel Mannigfaltigkeiten oder auch $S^1 \vee S^1$) ist jede Überlagerung mit Faser $F = p^{-1}(b_0)$ (bis auf Isomorphie) eindeutig durch ihre Monodromie bestimmt, d.h. sie kann aus dieser rekonstruiert werden. Außerdem sind in diesem Fall zwei Überlagerungen genau dann äquivalent, wenn die Monodromien in der Gruppe* Bijektionen$(F)$ *zueinander konjugiert sind, d.h.* $M_2 = hM_1h^{-1}$ *für ein* $h \in$ Bijektionen$(F)$.