Universität Hamburg | Topologie | Winter 2013/14
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Übungsstunde 10

1. Sei X das Komplement endlich vieler Geraden durch den Nullpunkt in $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von X! Ändert sich die Antwort, wenn Sie statt Geraden im $\mathbb{R}^3$ Geraden im $\mathbb{R}^4$ betrachten?

2. Für jedes $g \geq 0$ "definieren" wir eine Fläche Σ_g vom Geschlecht g wie folgt: $\Sigma_0 := S^2$, und für $g \geq 1$ sei Σ_g die Fläche, welche aus Σ_{g-1} durch folgende Operation entsteht: Man wähle Einbettungen $f_1 : D^2 \to \Sigma_{g-1}$ und $f_2 : D^2 \to T^2$, und verklebe $\Sigma_{g-1} \setminus \{f_1(0)\}$ mit $T^2 \setminus \{f_2(0)\}$, indem man $f_1(z) \in \Sigma_{g-1}$ mit $f_2(\varrho(z)) \in T^2$ identifiziert, wobei $\varrho : D^2 \setminus \{0\} \to D^2 \setminus \{0\}$ die Abbildung $\varrho(re^{\mathbf{i}\varphi}) := (1-r)e^{\mathbf{i}\varphi}$ sein soll.
Man kann zeigen, dass die so erhaltene Fläche in der Tat bis auf Homöomorphismus nicht von den getroffenen Wahlen abhängt.

- **a)** Veranschaulichen Sie an einem Bild, was bei der Verklebung passiert!
- **b)** Berechnen Sie induktiv die Fundamentalgruppe von Σ_g!
Hinweis: Sie haben als Übungsaufgabe schon einmal bewiesen, dass $T^2 \setminus \{pt\}$ homotopieäquivalent zu $S^1 \vee S^1$ ist. Wie verallgemeinert sich diese Aussage für Σ_g?
- **c)** Man erhält eine Fläche Σ_g^*, indem man in analoger Weise Σ_g und $\mathbb{R}P^2$ miteinander verklebt. Was ist die Fundamentalgruppe von Σ_g^*?