Universität Hamburg
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Winter 2013/14

Topologie

Übungsaufgaben 8

1. Sei X wegzusammenhängend. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) X ist einfach zusammenhängend.

b) Jede Abbildung $\gamma : S^1 \to X$ besitzt eine Fortsetzung zu einer Abbildung $G : D^2 \to X$ mit $G|_{S^1} = \gamma$.

c) Für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ sind je zwei beliebige Wege $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega(X; x_0, x_1)$ stets homotop relativ zu den Endpunkten.

2. Zeigen Sie, dass die folgenden Paare von Räumen jeweils homotopieäquivalent sind:

a) $K^2 \setminus *$ und $T^2 \setminus *$ (K^2 ist die Kleinsche Flasche).

b) $\mathbb{R}P^{n+1} \setminus *$ und $\mathbb{R}P^n$.

c) $S^n \setminus S^m$ und S^{n-m-1} (hier ist $0 \leq m < n$, und wir betrachten die Standardeinbettung $S^m \subset S^n$ für die Definition des ersten Raumes).

In den ersten beiden Teilaufgaben dürfen Sie sich jeweils einen beliebigen Punkt $*$ im jeweiligen Raum aussuchen.

3. Beweisen Sie, dass die Sphären S^n für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend sind, indem Sie folgendes zeigen:

a) Jeder Weg $\gamma \in \Omega(S^n; x)$, welcher einen Punkt $y \neq x$ in S^n nicht trifft, ist homotop rel $\{0, 1\}$ zum konstanten Weg ϵ_x.

b) Sei nun $x \neq y \in S^n$ und $B(y, r) \subset S^n$ ein offener Ball um y, welcher x nicht enthält. Ist dann $\gamma \in \Omega(X, x)$ beliebig, so gibt es endlich viele disjunkte offene Intervalle $(a_i, b_i) \subset [0, 1]$, welche $\gamma^{-1}(y)$ überdecken und so gewählt werden können, dass ihre Randpunkte auf Randpunkte von $B(y, r)$ abgebildet werden.

c) Ist $n \geq 2$, so sind die Einschränkungen $\gamma|_{[a_i, b_i]}$ jeweils homotop zu Wegen in $\overline{B(y, r)}$, welche y nicht treffen.

d) Aus diesen Aussagen folgt die Behauptung.

Bitte wenden!

4. In der Vorlesung wurde der Abbildungsgrad $\deg : [S^1, S^1] \to \mathbb{Z}$ definiert.

a) Zeigen Sie, dass für stetige $f, g : S^1 \to S^1$

$$\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$$

gilt!

b) Wie berechnen sich aus $\deg(f)$ die Grade $\deg(-f)$ und $\deg(\bar{f})$? Hier soll $\bar{f}$ die Abbildung $z \mapsto \overline{f(z)}$ sein, wobei in der Formel der Balken für komplexe Konjugation steht.

c) Beweisen Sie, dass jedes $f : S^1 \to S^1$ mit $\deg(f) \neq 0$ surjektiv ist! Gilt die Umkehrung?

d) Welche(n) Grad(e) kann eine Homotopieäquivalenz $f : S^1 \to S^1$ haben?