Universität Hamburg
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Winter 2013/14

Topologie

Übungsaufgaben 6

1. Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ ein Produkt topologischer Räume. Zeigen Sie:

a) Sind $Y_i \subset X_i$ Teilmengen, so gilt

$$\overline{\prod_{i \in I} Y_i} = \prod_{i \in I} \overline{Y_i}.$$

b) Sind alle X_i regulär, so ist auch X regulär.
Hinweis: Sie wissen bereits, dass unter dieser Voraussetzung X Hausdorffsch ist (warum?), also ist X auch T_1. Benutzen Sie das Lemma aus der Vorlesung, welches eine äquivalente Beschreibung der T_3-Eigenschaft liefert, um diese nachzuprüfen.

2. Komplementär zur vorherigen Aufgabe sollen Sie nun beweisen, dass das Produkt von normalen Räumen nicht normal sein muss. Dazu betrachten wir $\mathbb{R}$ mit der Sorgenfrey–Topologie τ_S, welche von den halboffenen Intervallen $[a, b)$ erzeugt wird.

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \tau_S)$ normal ist!

b) Zeigen Sie, dass das Produkt $X = (\mathbb{R}, \tau_S) \times (\mathbb{R}, \tau_S)$ nicht normal ist!

Eine mögliche Beweisstrategie besteht darin, folgendes Lemma zu beweisen und auf $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \subset X$ und $S = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset X$ anzuwenden:
Lemma: Enthält X eine dichte Teilmenge D und einen abgeschlossenen diskreten Teilraum S, so dass $\operatorname{card} S \geq \operatorname{card} \mathcal{P}(D)$, so ist X nicht normal.

3. Zeigen Sie, dass die kompakt-offene Topologie auf $C([0, 1], \mathbb{R})$ mit der von der Metrik

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

erzeugten uniformen Topologie übereinstimmt! Kann man in dieser Aussage $\mathbb{R}$ auch durch einen beliebigen metrischen Raum X ersetzen? Gilt die Aussage auch für den Raum $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der beschränkten stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$?

Bitte bearbeiten Sie folgende Aufgabe auf einem getrennten Blatt (auf Wunsch auch anonym).

4. Formulieren Sie je eine Frage mit Bezug zu den bisherigen Themen der Vorlesung, welche

a) sich Ihrer Meinung nach nicht mit dem bisherigen Wissen der Vorlesung beantworten lässt, deren Antwort Sie aber trotzdem interessiert.

b) sich Ihrer Meinung nach als Übungsaufgabe zum bisherigen Stoff eignen würde.