Universität Hamburg
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Winter 2013/14

Topologie

Übungsaufgaben 12

1. Wir betrachten wieder einmal die Konfigurationsräume

$$\widetilde{C^k}(\mathbb{R}^n) := \{(x_1,\dots,x_k) \in (\mathbb{R}^n)^k \mid x_i \neq x_j \text{falls } i \neq j\}$$

von geordneten k-Tupeln paarweise verschiedener Punkte im $\mathbb{R}^n$ sowie

$$C^k(\mathbb{R}^n) := \{M \subset \mathbb{R}^n \,:\, |M| = k\}$$

von ungeordneten k-Tupeln paarweise verschiedener Punkte im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die offensichtliche Abbildung

$$p : \widetilde{C^k}(\mathbb{R}^n) \to C^k(\mathbb{R}^n) \quad , \quad p(x_1,\dots,x_k) = \{x_1,\dots,x_k\}$$

eine Überlagerung ist, und bestimmen Sie die Gruppe der Decktransformationen!

2. Es sei $p : E \to B$ eine Überlagerung, und $f : X \to B$ sei eine beliebige stetige Abbildung. Wir betrachten das *Faserprodukt*

$$f^*E := \{(x,e) \in X \times E \mid f(x) = p(e)\} \subset X \times E$$

als Teilraum des Produktes, und bezeichnen die Einschränkungen der Projektion auf X mit $\pi : f^*(E) \to X$. Zeigen Sie, dass $\pi : f^*E \to X$ wieder eine Überlagerung ist!
Das Faserprodukt (auch "Pullback" genannt) passt in das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

Hier ist $\tilde{f} : f^*E \to E$ die Projektion auf die zweite Komponente. Die universelle Eigenschaft des Faserproduktes finden Sie zum Beispiel auf Seite 27 des Buches von Laures und Szymik.

3. Sei X ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum mit endlicher Fundamentalgruppe. Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f : X \to S^1$ nullhomotop ist!

4. Der Hawaii'sche Ohrring ist der topologische Raum $H \subset \mathbb{R}^2$, welcher aus der Vereinigung der Kreise in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkten $(\frac{1}{n}, 0)$ und Radien $\frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ entsteht.

a) Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe von H nicht abzählbar ist! Insbesondere ist sie also größer als das freie Produkt von abzählbar vielen Kopien von $\mathbb{Z}$.

b) Beweisen Sie, dass H keine Überlagerung mit einfach-zusammenhängendem Totalraum besitzt!