Universität Hamburg
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Winter 2013/14

Topologie

Übungsaufgaben 11

1. Zeigen Sie, dass in einer Überlagerung mit zusammenhängender Basis jeder Punkt die gleiche Anzahl von Urbildern besitzt!

2. **a)** Gibt es ein komplexes Polynom P vom Grad ≥ 2, so dass es als Funktion $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ aufgefasst eine Überlagerung definiert?

b) Zeigen Sie, dass man für jedes komplexe Polynom P vom Grad ≥ 2 endliche Teilmengen $Z = \{z_1, \dots, z_r\} \in \mathbb{C}$ sowie $W = \{w_1, \dots, w_s\} \in \mathbb{C}$ findet, so dass die Funktion $P : \mathbb{C} \setminus Z \to \mathbb{C} \setminus W$ eine Überlagerung definiert!

3. Die Abbildungen $p : X \to Y$ und $q : Y \to Z$ seien Überlagerungen.

a) Zeigen Sie, dass $q \circ p : X \to Z$ eine Überlagerung ist, falls $q^{-1}(z)$ für alle $z \in Z$ endlich ist!

b) Finden Sie ein Beispiel, in dem q keine endliche Überlagerung ist und $q \circ p$ gar keine Überlagerung ist?

4. *(Das Ping-Pong-Lemma)*

a) Gegeben sei eine Gruppe G mit zwei verschiedenen Elementen $g_1 \neq g_2$, welche jeweils eine unendliche zyklische Untergruppe $G_i \subset G$ erzeugen. Wir nehmen außerdem an, dass die Gruppe G auf einem topologischen Raum X wirkt, und dass disjunkte nichtleere Teilmengen X_1 und X_2 in X existieren, so dass jedes nichttriviale Element von G_1 die Teilmenge X_1 in die Teilmenge X_2 abbildet, und jedes nichttriviale Element von G_2 die Teilmenge X_2 in die Teilmenge X_1. Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen die beiden Elemente g_1 und g_2 eine freie Untergruppe von G erzeugen!
Hinweis: Sie müssen zeigen, dass kein Wort in g_1 und g_2 und ihren Inversen das triviale Element von G repräsentiert.

b) Die Gruppe

$$\Gamma := SL(2, \mathbb{Z}) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\}$$

wirkt auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C} \mid y > 0\} \subset \mathbb{C}$ als Untergruppe der Möbiustransformationen, d.h. durch

$$A \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Benutzen Sie diese Wirkung um zu beweisen, dass die beiden Elemente

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

eine freie Untergruppe $\Gamma(2)$ vom Rang 2 in $SL(2, \mathbb{Z})$ erzeugen.

c) Wirkt $\Gamma(2)$ diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$?