Universität Hamburg
Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Winter 2013/14

Topologie

Übungsaufgaben 10

1. **a)** Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist!

b) Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe des Komplements der Kleeblattschlinge im $\mathbb{R}^3$ nicht isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist!

[Quelle: wikimedia commons]

c) Können sie eine Präsentation dieser Gruppe angeben?

2. Konstruieren Sie zu jeder endlich erzeugten abelschen Gruppe A einen topologischen Raum X_A mit einem Fußpunkt x_0, so dass $\pi_1(X_A, x_0) \cong A$! (Falls Sie den Struktursatz für diese Gruppen nicht kennen, so schlagen Sie ihn nach!)

3. Sei $X(a,b,c,d) = \overline{B^2} \times S^1 \cup_f S^1 \times \overline{B^2}$ der Raum, welcher durch das Verkleben zweier Volltori $X_1 = \overline{B^2} \times S^1$ und $X_2 = S^1 \times \overline{B^2}$ entlang der Abbildung $f : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$, $f(z,w) = (z^a w^b, z^c w^d)$ für ganze Zahlen $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ entsteht (Spezialfälle hatten wir bereits auf Blatt 3 betrachtet). Berechnen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ in Abhängigkeit von a, b, c und d, wobei x_0 die Äquivalenzklasse in X von $(1,1) \in X_1$ sei!
Falls $ad - bc = 1$, so erhält man auf diese Weise 3-dimensionale Linsenräume*. Diese sind topologische Mannigfaltigkeiten (warum?).*

4. In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass die Fundamentalgruppe jeder topologischen Gruppe abelsch ist.

a) Es sei X eine nichtleere Menge, auf der zwei binäre Operationen $\star$ und $\odot$ definiert sind, welche folgende Bedingungen erfüllen:

1. Es gibt ein Element $e \in X$, so dass $e \odot x = x \odot e = e \star x = x \star e = x$ für alle $x \in X$ gilt.
2. Für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ gilt $(x_1 \star x_2) \odot (y_1 \star y_2) = (x_1 \odot y_1) \star (x_2 \odot y_2)$.

Zeigen Sie, dass die Operationen $\star$ und $\odot$ übereinstimmen und abelsch sind!

b) Ist G eine topologische Gruppe, so entsteht durch punktweise Multiplikation zweier Schleifen $\gamma, \gamma' \in \Omega(G, e)$ eine neue Schleife $\gamma \cdot \gamma' \in \Omega(G, e)$ mit $(\gamma \cdot \gamma')(t) = \gamma(t)\gamma'(t)$. Zeigen Sie, dass diese Operation zu einer Operation $\odot : \pi_1(G, e) \times \pi_1(G, e) \to \pi_1(G, e)$ absteigt!

c) Zeigen Sie, dass die Gruppenmultiplikation $\star$ und die gerade betrachtete Operation $\odot$ auf $\pi_1(G, e)$ die Voraussetzungen für Teil **a)** erfüllen.