

Vortragsthemen

Seminar zur Funktionentheorie

Spielregeln:

- Dies ist ein mathematisches Seminar. Gleichberechtigte Lernziele sind einerseits das Verständnis der mathematischen Inhalte und andererseits die zielpublikumsgerechte Präsentation des im Selbststudium angeeigneten Wissens.
- Die Vortragszeit beträgt jeweils 70 Minuten. Die übrigen 20 Minuten bleiben für Fragen, Diskussionen und Ergänzungen. Eine aktive Beteiligung an der Diskussion wird erwartet und ist Teil der Seminarleistung.
- Zu jedem Vortrag wird von dem oder der Vortragenden ein Begleittext ausgearbeitet, welcher die Inhalte verständlich zusammenfasst. Dieser sollte so kurz wie möglich und so lang wie nötig sein, und ist mir 2 Wochen vor dem Vortragstermin abzugeben.

Abbildungsverhalten holomorpher Funktionen

1. Der Satz von Bloch

Formulieren Sie den Satz von A. Bloch, und stellen Sie die verschiedenen Beweisstrategien vor. Erklären Sie die Bedeutung der Funktionen $f_n(z) = \frac{e^{nz}-1}{n}$ sowie $g(z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ als illustrierende Beispiele.

Literatur:

R. Remmert, "Funktionentheorie 2", §10.1, S.223–231

2. Der kleine Satz von Picard und seine Anwendungen

Formulieren und beweisen Sie den kleinen Satz von Picard, und stellen Sie die im Text beschriebenen Anwendungen vor.

Literatur:

R. Remmert, "Funktionentheorie 2", §10.2, S.231–235

3. Der Satz von Schottky und der große Satz von Picard

Formulieren und beweisen Sie den Satz von Schottky, sowie die im Text beschriebenen Anwendungen, und leiten Sie auch den großen Satz von Picard daraus her.

Literatur:

R. Remmert, “Funktionentheorie 2”, §10.3+10.4, S.235–240

4. Geometrischer Beweis des großen Satz von Picard

Erklären Sie, wie man mit Hilfe der hyperbolischen Metrik einen “geometrischen” Beweis des großen Picardschen Satzes erhält.

Literatur:

S. Krantz, “Complex Analysis: The Geometric Viewpoint”, §2, S.67–94

Elliptische Funktionen

5. Die Liouvilleschen Sätze

Definieren Sie den Begriff der elliptischen Funktion, formulieren und beweisen Sie die drei Liouvilleschen Sätze, und diskutieren Sie erste Folgerungen aus diesen. Stellen Sie auch Lösungen der Aufgaben 2) und 3) vor.

Literatur:

E. Freitag, R. Busam, “Funktionentheorie”, §5.1, S. 256–266

6. Die Weierstraßsche $\wp$ -Funktion

Führen Sie die Weierstraßsche $\wp$ -Funktion zu einem gegebenen Gitter $L \subset \mathbb{C}$ ein und diskutieren Sie deren Eigenschaften, sowie die ihrer Ableitung $\wp'$. Diskutieren Sie auch die Lösung der Aufgabe 5).

Literatur:

E. Freitag, R. Busam, “Funktionentheorie”, §5.2, S. 266–273

7. Der Körper der elliptischen Funktionen

Beweisen Sie den Struktursatz für den Körper der elliptischen Funktionen zu gegebenem Gitter, und leiten Sie die algebraische Differentialgleichung der $\wp$ -Funktion her.

Formulieren und beweisen Sie auch die analytische Form des Additionstheorems und der Verdopplungsformel.

Literatur:

E. Freitag, R. Busam, “Funktionentheorie”, §5.3+5.4, S. 273–277, 285–287

8. Das Abelsche Theorem

Formulieren Sie den Abelschen Existenzsatz für elliptische Funktionen mit vorgegebenen Null- und Polstellen, und beweisen Sie diesen. Stellen Sie den Existenzbeweis für die im Beweis auftretende Funktion σ mit Hilfe der Theta-Reihe vor.

Literatur:

E. Freitag, R. Busam, “Funktionentheorie”, §5.6, S. 298–306

9. Geometrische Form des Additionstheorems

Erläutern Sie die projektive Einbettung eines Torus $\mathbb{C}/L$ in den komplexen projektiven Raum mit Hilfe der $\wp$ -Funktion und Ihrer Ableitung. Beschreiben Sie dann die geometrische Interpretation des Additionstheorems, einschließlich des geometrischen Beweises.

Literatur:

E. Freitag, R. Busam, “Funktionentheorie”, §5.3+5.5, S. 277–283, 287–289

10. Die Modulgruppe und die Modulfunktion

Führen Sie die Äquivalenzrelation auf den Gittern ein, und diskutieren Sie den Zusammenhang mit der Wirkung von $GL_+(2, \mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene. Motivieren Sie die Modulgruppe und definieren Sie die Modulfunktion. Beweisen Sie, dass die Modulfunktion analytisch und invariant unter der Wirkung der Modulgruppe ist. Beschreiben Sie die Modulfigur und zeigen Sie, dass die Modulfunktion surjektiv ist.

Literatur:

E. Freitag, R. Busam, “Funktionentheorie”, §5.7+5.8, S. 309–323

Riemannsche Flächen

11. Definition und elementare Beispiele und Eigenschaften

Erläutern Sie die Definition einer Riemannschen Fläche und diskutieren Sie die elementaren Beispiele (Riemannsche Zahlenkugel, elliptische Kurven, $\mathbb{CP}^1$) sowie (ebene) affine und projektive Kurven als allgemeine Beispielsklassen.

Literatur:

R. Miranda, “Algebraic curves and Riemann surfaces” §I, S. 1–20

12. Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen und ihre Eigenschaften

Definieren Sie holomorphe Funktionen auf Riemannschen Flächen und geben Sie elementare Beispiele. Diskutieren Sie kurz, wie sich lokale Eigenschaften holomorpher Funktionen in $\mathbb{C}$ auf Riemannsche Flächen übertragen. Geben Sie Beispiele meromorpher Funktionen und stellen Sie diese in den allgemeinen Kontext holomorpher Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen.

Literatur:

R. Miranda, “Algebraic curves and Riemann surfaces” §II, S. 21–44

13. Globale Eigenschaften holomorpher Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen

Diskutieren Sie kurz die lokale Normalform einer holomorphen Abbildung zwischen Riemannschen Flächen, führen Sie die Multiplizität ein und diskutieren Sie Verzweigungspunkte. Beschreiben Sie den Grad einer holomorphen Abbildung zwischen kompakten Riemannschen Flächen, und definieren Sie die Euler-Charakteristik einer triangulierten Fläche. Formulieren und beweisen Sie die Hurwitz-Formel.

Literatur:

R. Miranda, “Algebraic curves and Riemann surfaces” §II, S. 44–55

14. Gruppenwirkungen auf Riemannschen Flächen und der Satz von Hurwitz

Diskutieren Sie endliche holomorphe Gruppenwirkungen auf einer Riemannschen Fläche, und zeigen Sie, dass der Quotientenraum in natürlicher Weise wieder die Struktur einer Riemannschen Fläche trägt. Beweisen Sie den Satz von Hurwitz über die Endlichkeit der Automorphismengruppe einer Fläche höheren Geschlechts.

Literatur:

R. Miranda, “Algebraic curves and Riemann surfaces” §III, S. 75–83