

Begleittext zum Vortrag

Der Körper der elliptischen Funktionen

Seminar Funktionentheorie bei Prof. Dr. Janko Latschev

Christian Offen

27.11.2013

Inhaltsverzeichnis

1	Die Struktur der Menge der elliptischen Funktionen	1
1.1	Vorbereitende Beobachtungen	1
1.2	Der Struktursatz für $K(L)$	3
2	Algebraische Differentialgleichung der Weierstraß'schen $\wp$ -Funktion	7
3	Additionstheorem und Verdoppelungsformel	8
3.1	Das Additionstheorem der Weierstraß'schen $\wp$ -Funktion	8
3.2	Die Verdoppelungsformel	11

1 Die Struktur der Menge der elliptischen Funktionen

1.1 Vorbereitende Beobachtungen

Zu zwei komplexen Zahlen $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ mit $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$ betrachten wir das Gitter

$$L := \{\mu w_1 + \lambda w_2 \mid \mu, \lambda \in \mathbb{Z}\}. \quad (1)$$

Elliptische Funktionen mit Periodengitter L sind meromorphe Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, für die $f(z) = f(z + w_1)$ und $f(z) = f(z + w_2)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ erfüllt ist.

Behauptung 1. *Die Menge $K(L)$ der elliptischen Funktionen mit dem Periodengitter L bildet einen Teilkörper des Körpers der auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen.*

Beweis. Das neutrale Element der Addition (die meromorphe Nullfunktion) und der Multiplikation (die meromorphe Einsfunktion) sind elliptisch und somit Elemente in $K(L)$. Außerdem ist die Menge der elliptischen Funktionen unter Addition, Multiplikation und der Bildung von additiv und multiplikativ Inversen abgeschlossen. $\square$

Sei $f \in K(L)$ eine nicht konstante elliptische Funktion, $\mathfrak{R}$ der Körper der rationalen Funktionen und

$$\mathbb{C}(f) := \{R(f) : R \in \mathfrak{R}\}. \quad (2)$$

Behauptung 2. *$\mathbb{C}(f)$ ist ein Teilkörper von $K(L)$ und die Funktion $\Phi: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{C}(f)$, $R \mapsto R(f)$ ist ein Isomorphismus vom Körper der rationalen Funktionen auf $\mathbb{C}(f)$.*

Beweis. Jede rationale Funktion ist von der Form $R = \frac{P}{Q}$ mit Polynomen P und Q , wobei $Q \neq 0$. $R(f)$ ist hierbei von der Darstellung von R unabhängig: Ist $\frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}$ eine weitere Darstellung von R , so gilt wegen $\frac{P}{Q} = \frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}$

$$\Rightarrow \forall z \in \overline{\mathbb{C}} : \lim_{w \rightarrow z} \frac{P(w)}{Q(w)} = \lim_{w \rightarrow z} \frac{\tilde{P}(w)}{\tilde{Q}(w)} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \forall z \in \overline{\mathbb{C}} : \lim_{w \rightarrow f(z)} \frac{P(w)}{Q(w)} = \lim_{w \rightarrow f(z)} \frac{\tilde{P}(w)}{\tilde{Q}(w)} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \forall z \in \overline{\mathbb{C}} : \frac{P}{Q}(f(z)) = \frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}(f(z)) \quad (5)$$

Dies bedeutet $\frac{P}{Q}(f) = \frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}(f)$, sodass wir die Wohldefiniertheit von $R(f)$ gezeigt haben. Man beachte außerdem, dass $R(f) \in K(L)$, da die elliptischen Funktionen einen Körper bilden.

Φ ist injektiv: Seien $R = \frac{P}{Q}$, $\tilde{R} = \frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}} \in \mathfrak{R}$ mit $R(f) = \tilde{R}(f)$, wobei $P, Q, \tilde{P}, \tilde{Q}$ Polynome mit $Q, \tilde{Q} \neq 0$ sind. Sei $W \subset \mathbb{C}$ die Bildmenge von f . Wegen $R(f) = \tilde{R}(f)$ gilt für alle $w \in W \cap \mathbb{C}$

$$P(w)\tilde{Q}(w) - \tilde{P}(w)Q(w) = 0. \quad (6)$$

Weil f nicht konstant ist, nimmt f unendlich viele Werte in $\mathbb{C}$ an. Damit ist $P \cdot \tilde{Q} - \tilde{P} \cdot Q$ ein Polynom mit unendlich vielen Nullstellen, also das Nullpolynom. Somit folgt $R = \tilde{R}$.

Außerdem ist Φ verträglich mit den Körperoperationen und per Definition von $\mathbb{C}(f)$ surjektiv. Das Bild bildet tatsächlich einen Teilkörper von $K(L)$, denn es ist unter Addition, Multiplikation und der Bildung von additiv und multiplikativ Inversen abgeschlossen und sowohl das additiv neutrale Element $0 = 0_{\mathfrak{R}}(f)$ als auch das multiplikativ neutrale Element $1 = 1_{\mathfrak{R}}(f)$ sind im Bild von Φ enthalten. □

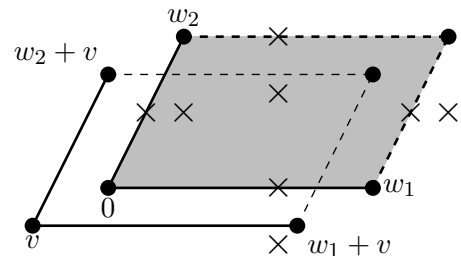
Behauptung 3. Ist $f \in K(L)$ mit Grundmasche $P = \{\mu w_1 + \lambda w_2 \mid \mu, \lambda \in [0, 1)\}$, so gilt

$$\sum_{z \in P} \text{Res}(f, z) = 0.$$

(vgl. Satz B aus §2.2 [2])

Beweis. Da $\bar{P}$ kompakt in $\mathbb{C}$ ist, kann f in P nur endlich viele Polstellen besitzen, denn gäbe es unendlich viele Polstellen in $P \subset \bar{P}$, könnten wir aus einer Folge dieser Polstellen eine in $\bar{P}$ konvergente Teilfolge auswählen, was der Tatsache widerspricht, dass die Polstellenmenge der meromorphen Funktion f auf $\mathbb{C}$ diskret in $\mathbb{C}$ liegen muss. Weil alle nicht hebbaren Singularitäten von f Polstellen sind (f ist eine auf $\mathbb{C}$ definierte meromorphe Funktion), besitzt die Summe $\sum_{z \in P} \text{Res}(f, z)$ nur endlich viele von Null verschiedene Summanden und auch in den an P angrenzenden Maschen existieren nur endlich viele Punkte mit $\text{Res}(f, z) \neq 0$.

Deshalb kann man durch leichtes Verschieben der Grundmasche P erreichen, dass in der verschobenen Masche $\tilde{P}$ genau die Punkte z die Eigenschaft $\text{Res}(f, z) \neq 0$ haben, welche bereits in P enthalten waren. Hierbei kann man gleichzeitig fordern, dass der Rand $\partial \tilde{P}$ keine Polstellen von f enthält. Mit anderen Worten: Wir können $v \in \mathbb{C}$ so wählen, dass die Summe $\sum_{z \in P} \text{Res}(f, z)$ und die Summe $\sum_{z \in v+P} \text{Res}(f, z)$ die selben von Null verschiedenen Summanden besitzen und die Polstellen von f außerhalb von $\partial(v+P)$ liegen.



Die als $\times$ markierten Punkte sind Beispiele für Polstellen von f .

Es bezeichne $\partial(v+P)$ den Rand der um v verschobenen Grundmasche P . Nun kann man mit dem Residuensatz folgern

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{z \in P} \text{Res}(f, z) &= 2\pi i \sum_{z \in (v+P)} \text{Res}(f, z) = \int_{\partial(v+P)} f(z) dz \\ &= \int_v^{w_1+v} f(z) dz + \int_{w_1+v}^{w_1+w_2+v} f(z) dz + \int_{w_1+w_2+v}^{w_2+v} f(z) dz + \int_{w_2+v}^v f(z) dz \\ (\text{Periodizität von } f) &= \int_v^{w_1+v} f(z) dz + \int_v^{w_2+v} f(z) dz + \int_{w_1+v}^v f(z) dz + \int_{w_2+v}^v f(z) dz = 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

1.2 Der Struktursatz für $K(L)$

Satz 1. (Struktursatz für $K(L)$) Zu jeder elliptischen Funktion $f \in K(L)$ existieren rationale Funktionen R und S , so dass

$$f = R(\wp) + \wp' S(\wp), \quad (7)$$

d.h.

$$K(L) = \mathbb{C}(\wp) + \mathbb{C}(\wp)\wp'. \quad (8)$$

Um den Satz zu beweisen, werden wir zunächst vorbereitende Sätze zeigen, welche auch für sich genommen wichtig sind.

Wir führen eine Notation für *Kreisringe* ein:

$$K(z_0; r, R) := \begin{cases} B(z_0, R) \setminus \overline{B(z_0, r)} & \text{für } r > 0 \\ B(z_0, R) \setminus \{z_0\} & \text{für } r = 0. \end{cases}$$

Ist f elliptisch, so liegt die Polstellenmenge von f diskret in $\mathbb{C}$. Somit kann man zu $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Konstante $R > 0$ wählen, sodass die Einschränkung $f|_{K(z_0; 0, R)}$ holomorph ist. Wenn wir von der Laurent-Entwicklung oder Laurent-Reihe von f um z_0 sprechen, so meinen wir die Reihe $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(z - z_0)^j$ mit eindeutig bestimmten $a_j \in \mathbb{C}$, welche auf $K(z_0; 0, R)$ in $\mathbb{C}$ konvergiert und mit $f(z)$ übereinstimmt.

Satz 2. Ist $f \in K(L)$ eine gerade, elliptische Funktion, deren Polstellenmenge Teilmenge von L ist, so existiert ein Polynom P , sodass $f = P(\wp)$.

Beweis. Ist f konstant, so gilt die Behauptung mit einem entsprechenden konstanten Polynom. Ist f nicht konstant, so besitzt f eine Polstelle in L und wegen der Periodizität damit in 0. Ist m der Grad dieser Polstelle, so hat die Laurent-Reihe um 0 die Gestalt

$$f(z) = \sum_{j=-m}^{\infty} a_j z^j. \quad (9)$$

Zwischenbehauptung: Ist f eine gerade, elliptische Funktion, so sind in der Laurent-Reihe von f um 0 nur gerade Koeffizienten von Null verschieden.

Beweis. Sei $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j$ die Laurent-Reihe von f um 0, welche auf $K(0; 0, R)$ für ein $R > 0$ mit $f(z)$ übereinstimmt. Wir betrachten

$$f_1(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{2j+1} z^{2j+1} \quad \text{und} \quad f_2(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{2j} z^{2j} \quad (10)$$

f_1 stellt eine ungerade und f_2 eine gerade und auf $K(0; 0, R)$ holomorphe Funktion dar. Es gilt für $z \in K(0; 0, R)$

$$f_1(z) + f_2(z) = (f_1 + f_2)(z) = f(z) \quad (11)$$

$$= f(-z) = (f_1 + f_2)(-z) = f_1(-z) + f_2(-z) \quad (12)$$

$$= -f_1(z) + f_2(z) \quad (13)$$

$$\Rightarrow -f_1(z) = f_1(z) \quad (14)$$

Damit ist f_1 die Nullfunktion, in deren Laurent-Entwicklung um 0 jeder Koeffizient Null ist. Damit gilt $a_{2j+1} = 0$ für alle $j \in \mathbb{Z}$. ■

Unter Benutzung der Zwischenbehauptung können wir f darstellen als

$$f(z) = \sum_{j=-2n}^{\infty} a_j z^j. \quad (15)$$

Die Polstelle um 0 ist somit von gerader Ordnung $2n$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir führen nun eine Induktion nach n durch:

Für $n = 0$ ist die Funktion konstant und die Behauptung bereits gezeigt. Die Behauptung gelte nun für alle $m \leq n - 1 \in \mathbb{N}$. Die Laurent-Entwicklung von $\wp$ um 0 besitzt die Form (vgl. 2.11 aus [1])

$$\wp(z) = z^{-2} + \dots, \quad z \in K(0; 0, \min\{\|w_1\|, \|w_2\|\}) \quad (16)$$

Somit gilt

$$\wp^n(z) = z^{-2n} + \dots, \quad z \in K(0; 0, \min\{\|w_1\|, \|w_2\|\}) \quad (17)$$

Durch $f - a_{-2n}\wp^n$ wird eine gerade Funktion $g \in K(L)$ definiert, deren Polstellenmenge in L enthalten ist. Sie besitzt die folgende Laurent-Entwicklung um 0:

$$f(z) - a_{-2n}\wp^n(z) = \sum_{j=-2(n-1)}^{\infty} b_j z^j, \quad b_j \in \mathbb{C}, \quad z \in K(0; 0, \min\{\|w_1\|, \|w_2\|\}) \quad (18)$$

Wegen (18) und der Zwischenbehauptung ist der Grad des Hauptteils der Laurent-Entwicklung von g um Null damit $2m$ mit $m \leq n - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert somit ein Polynom P , sodass $g = P(\wp)$. Damit ist

$$f = a_{-2n}\wp^n + P(\wp), \quad (19)$$

sodass auch f ein Polynom in $\wp$ ist und die Behauptung folgt mittels vollständiger Induktion. $\square$

Satz 3. *Jede gerade, elliptische Funktion f ist als rationale Funktion in der Weierstraß'schen $\wp$ -Funktion darstellbar.*

Beweis. Besitzt f außerhalb von L keine Polstelle, so ist die Behauptung bereits mit Satz 2 bewiesen. Sei nun $f \in K(L)$ eine gerade elliptische Funktion mit Polstelle in $z_0 \notin L$.

Zwischenbehauptung: Man kann $N \in \mathbb{N}$ hinreichend groß wählen, sodass die durch

$$g(z) = (\wp(z) - \wp(z_0))^N f(z) \quad (20)$$

definierte Funktion in z_0 eine hebbare Singularität besitzt.

Beweis. Die durch $h(z) = \wp(z) - \wp(z_0)$ definierte Funktion ist auf $B(z_0, \text{dist}(z_0, L))$ holomorph (beachte: $z_0 \notin L$) und besitzt eine Nullstelle der Ordnung N_1 in z_0 . Hieraus folgt

$$h(z_0) = h'(z_0) = \dots = h^{(N_1-1)}(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad h^{(N_1)}(z_0) \neq 0. \quad (21)$$

Auf der Umgebung $B(z_0, \frac{1}{2}\text{dist}(z_0, L))$ konvergiert die Taylor-Reihe um z_0 absolut und gleichmäßig gegen h . Für alle $z \in B(z_0, \frac{1}{2}\text{dist}(z_0, L))$ gilt somit

$$h(z) = \frac{g^{(N_1)}}{N_1!}(z - z_0)^{N_1} + \frac{g^{(N_1+1)}}{(N_1 + 1)!}(z - z_0)^{(N_1+1)} + \dots \quad (22)$$

Sei N_2 die Ordnung der Polstelle z_0 von f und $M := N_1 \cdot \left\lceil \frac{N_2}{N_1} \right\rceil$. Für geeignete $b_j \in \mathbb{C}$, $j \geq M$ gilt für alle $z \in B(z_0, \frac{1}{2}\text{dist}(z_0, L))$

$$(h(z))^{\left\lceil \frac{N_2}{N_1} \right\rceil} = b_M(z - z_0)^M + b_{M+1}(z - z_0)^{M+1} + \dots, \quad (23)$$

wobei auch diese Reihe auf $B(z_0, \frac{1}{2}\text{dist}(z_0, L))$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Deshalb können wir folgern

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (h(z))^{\left\lceil \frac{N_2}{N_1} \right\rceil} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{j=M}^{\infty} b_j(z - z_0)^j f(z) \quad (24)$$

$$= \sum_{j=M}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} b_j(z - z_0)^j f(z) \quad (25)$$

Nach Wahl von N_2 als Ordnung der Polstelle z_0 von f und wegen $M = N_1 \cdot \left\lceil \frac{N_2}{N_1} \right\rceil \geq N_2$ gilt nun

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (h(z))^{\left\lceil \frac{N_2}{N_1} \right\rceil} f(z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } M > N_2 \\ b_{N_2} \underbrace{\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{N_2} f(z)}_{\text{existiert in } \mathbb{C}} & \text{falls } M = N_2. \end{cases} \quad (26)$$

Somit kann $N := \left\lceil \frac{N_2}{N_1} \right\rceil$ gewählt werden und die Zwischenbehauptung ist bewiesen. ■

Wie in Behauptung 3 argumentiert, besitzt f nur endlich viele Polstellen in der Grundmasche des Gitters L . Seien also a_j , $1 \leq j \leq m$ die Polstellen von f , die in der Grundmasche aber nicht in L enthalten sind.

Mit der *Zwischenbehauptung* finden wir $N_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq m$, sodass alle Polstellen der durch

$$g(z) = f(z) \prod_{j=1}^m (\wp(z) - \wp(a_j))^{N_j} \quad (27)$$

definierten elliptischen und geraden Funktion in L enthalten sind. Nach Satz 2 existiert ein Polynom P , sodass $g = P(\wp)$. Damit gilt

$$f(z) = \frac{P(\wp(z))}{\prod_{j=1}^m (\wp(z) - \wp(a_j))^{N_j}}, \quad (28)$$

sodass sich f als rationale Funktion in $\wp$ darstellen lässt. □

Anmerkung. Im Vokabular der Algebra bedeutet die soeben bewiesene Aussage (Satz 3), dass der Körper der geraden elliptischen Funktionen gleich $\mathbb{C}(\wp)$ ist und damit isomorph zum Körper $\mathfrak{R}$ der Rationalen Funktionen.

Nun können wir den Struktursatz für $K(L)$ beweisen:

Beweis des Satzes 1. Wir können f in eine gerade und eine ungerade Funktion zerlegen:

$$f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) + \frac{1}{2}(f(z) - f(-z)) \quad (29)$$

Hierbei ist die Funktion $f_0(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z))$ gerade und die Funktion $f_1(z) = \frac{1}{2}(f(z) - f(-z))$ ungerade. Da auch $z \mapsto f(-z)$ eine elliptische Funktion darstellt, sind $f_1, f_2 \in K(L)$.

Die Funktion $\wp' \in K(L)$ ist ungerade und wegen

$$\frac{f_1(-z)}{\wp'(-z)} = \frac{-f_1(z)}{-\wp'(z)} = \frac{f_1(z)}{\wp'(z)} \quad (30)$$

stellt $\frac{f_1}{\wp'} \in K(L)$ eine gerade Funktion dar. Nach Satz 3 existieren nun rationale Funktionen R und S mit $f_0 = R(\wp)$ und $\frac{f_1}{\wp'} = S(\wp)$. Somit gilt

$$f = f_0 + \wp' \cdot \frac{f_1}{\wp'} = R(\wp) + \wp' S(\wp) \quad (31)$$

und die Aussage ist bewiesen. □

2 Algebraische Differentialgleichung der Weierstraß'schen $\wp$ -Funktion

Satz 4. *Es gilt*

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - 60G_4\wp(z) + 140G_6,$$

wobei $G_j = \sum_{w \in L \setminus \{0\}} w^{-j}$ die Eisensteinreihen sind. (Zur abs. Konvergenz der Eisensteinreihen für $j \geq 3$ vgl. Hilfssatz 2.2 [1]).

Beweis. Nach Satz 2 lässt sich die gerade, elliptische Funktion $\wp'^2$ als Polynom in $\wp$ darstellen. Wir wollen dieses Polynom wie in dem Beweis des Satzes 2 konstruieren, um die behauptete Differentialgleichung der $\wp$ -Funktion zu erhalten.

Vorgehen: Induktiv erzeugen wir, beginnend mit der Laurent-Entwicklung von $\wp'^2$ um 0, solange Laurent-Reihen, deren Hauptteile absteigenden Grad haben, bis schließlich der Hauptteil verschwindet und die durch die Taylor-Reihe definierte Funktion als holomorphe elliptische Funktion konstant ist. Die Reduzierung des Grades des Hauptteils erfolgt jeweils mit Hilfe der $\wp$ -Funktion, sodass man am Ende des Vorgangs ein Polynom in $\wp$ vorliegen hat, das mit der Anfangsfunktion $\wp'^2$ übereinstimmt.

Wie in (15) aus dem Beweis des Satzes 2 benötigen wir zunächst die Laurent-Entwicklung von $\wp'^2$: Nach [1] 2.11 gilt für die Laurent-Entwicklung um 0 der Funktion $\wp$

$$\wp(z) = z^{-2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \dots, \quad (32)$$

Gliedweise Differenzieren und Quadrieren ergibt

$$\wp'(z) = -2z^{-3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \dots \quad (33)$$

$$\wp'^2(z) = 4z^{-6} - 24G_4z^{-2} - 80G_6 + \dots \quad (34)$$

Gemäß (18) bilden wir nun die Laurent-Reihe von $\wp'^2 - 4\wp^3$ um 0, um eine Funktion zu erhalten, deren Hauptteil einen geringeren Grad besitzt als $\wp'^2$. (Aus dem Beweis des Satzes 2 wissen wir, dass sich der Grad um mindestens 2 verringert.)

Um die Laurent-Reihe von $\wp^3$ um 0 zu erhalten, quadrieren wir $\wp(z)$ in der Darstellung (32) und multiplizieren dann die erhaltene Darstellung wieder mit $\wp(z)$.

$$\wp^2(z) = z^{-4} + 6G_4 + 10G_6z^2 + \dots \quad (35)$$

$$\wp^3(z) = \wp(z) \cdot \wp^2(z) = z^{-6} + 9G_4z^{-2} + 15G_6 + \dots \quad (36)$$

Nun erhalten wir

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) = -60G_4z^{-2} - 140G_6 + \dots \quad (37)$$

Jetzt können wir das Reduktionsverfahren auf die Funktion $\wp'^2 - 4\wp^3$ anwenden und müssen gemäß (18) die Laurent-Reihe von $\wp'^2 - 4\wp^3 - (-60G_4\wp)$ bilden. Diese ergibt sich unter Verwendung der bereits bekannten Laurent-Reihen von $\wp$ (32) und von $\wp'^2 - 4\wp^3$ (37) zu

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + 60G_4\wp(z) = -140G_6 + \dots \quad (38)$$

Da der Hauptteil um 0 der elliptischen Funktion $\wp'^2 - 4\wp^3 + 60G_4\wp$ verschwindet, besitzt sie in 0 keine Polstelle und somit auch nicht in L . Als Funktion von $\wp$ und $\wp'$ kann sie außerhalb von L keine Polstellen besitzen. Als polstellenfreie, elliptische Funktion ist sie schließlich konstant und wegen (38) muss die Konstante $-140G_6$ betragen. Wir erhalten somit

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + 60G_4\wp(z) = -140G_6 \quad (39)$$

und die behauptete Differentialgleichung ist bewiesen. $\square$

3 Additionstheorem und Verdoppelungsformel

3.1 Das Additionstheorem der Weierstraß'schen $\wp$ -Funktion

Satz 5. (*Additionstheorem der $\wp$ -Funktion*) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z + w, z - w, z, w \notin L$ und $z \neq w$ gilt

$$\wp(z + w) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} \right)^2 - \wp(z) - \wp(w). \quad (40)$$

Beweis. (*Die Vorgehensweise orientiert sich an §5 aus [2].*)

Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}L$. Wir definieren eine elliptische Funktion durch

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}. \quad (41)$$

Zwischenbehauptung: Alle Hauptteile h_z von f im Punkt z verschwinden, außer für $z \in L$ oder $z \in -w + L$. Hier ergibt sich die Laurent-Reihe von f um 0 zu

$$f(z) = -z^{-1} - \wp(w)z + \mathcal{O}(z^2) \quad (42)$$

und um $-w$ zu

$$f(z) = (z + w)^{-1} + c + \mathcal{O}(z + w) \text{ für eine Konstante } c \in \mathbb{C}. \quad (43)$$

Beweis der Zwischenbehauptung: Als Singularitäten von f kommen nur $z \in L$, $z \in w + L$ und $z \in -w + L$ in Frage, da dies die Nullstellen des Nenners von $f(z)$, bzw. die Polstellen von $\wp$ und $\wp'$ sind.

- *Fall $z \in L$.* Da f elliptisch ist, genügt es, den Fall $z = 0$ zu betrachten. Da f als elliptische Funktion keine wesentlichen Singularitäten besitzt, kann $m \in \mathbb{Z}$ maximal mit der Eigenschaft gewählt werden, dass $a_k = 0$ für alle $k < m$, wobei die a_l die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung von f um 0 sind. Es gilt folglich für alle z in einer hinreichend kleinen punktierten Umgebung von 0

$$\sum_{l=m}^{\infty} a_l z^l = f(z) = \frac{1}{2} \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} \quad (44)$$

$$\Rightarrow (\wp(z) - \wp(w)) \sum_{l=m}^{\infty} a_l z^l = \frac{1}{2} (\wp'(z) - \wp'(w)) \quad (45)$$

Einsetzen von $\wp(z) = z^{-2} + \mathcal{O}(z^2)$ und $\wp'(z) = -2z^{-3} + \mathcal{O}(z)$ (vgl. 2.11 [1]) ergibt

$$(z^{-2} + \mathcal{O}(z^2) - \wp(w)) \sum_{l=m}^{\infty} a_l z^l = -z^{-3} + \mathcal{O}(z) - \frac{1}{2} \wp'(w) \quad (46)$$

$$\Rightarrow a_m z^{m-2} + a_{m+1} z^{m-1} + (a_{m+2} - \wp(w)a_m) z^m + \dots = -z^{-3} + \mathcal{O}(z) - \frac{1}{2} \wp'(w) \quad (47)$$

Weil $m \in \mathbb{Z}$ maximal mit der Eigenschaft gewählt wurde, dass $a_k = 0$ für alle $k < m$, folgt $m = -1$. Also

$$a_{-1} z^{-3} + a_0 z^{-2} + (a_1 - \wp(w)a_{-1}) z^{-1} + \dots = -z^{-3} + \mathcal{O}(z) - \frac{1}{2} \wp'(w). \quad (48)$$

Ein Vergleich der Koeffizienten liefert

$$a_{-1} = -1 \quad (49)$$

$$a_0 = 0 \quad (50)$$

$$0 = a_1 - \wp(w)a_{-1} = a_1 + \wp(w) \Rightarrow a_1 = -\wp(w) \quad (51)$$

Damit ist die Laurent-Reihe von f um 0 bestimmt als

$$f(z) = -z^{-1} - \wp(w)z + \mathcal{O}(z^2). \quad (52)$$

- *Fall $z \in w + L$.* Wir zeigen, dass f in z eine hebbare Singularität besitzt. Wieder genügt es, da f elliptisch ist, den Fall $z = w$ zu betrachten. Es gilt für jedes z in einer hinreichend kleinen punktierten Umgebung von w

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{z - w} \cdot \frac{z - w}{\wp(z) - \wp(w)} \quad (53)$$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow w} f(z) = \frac{1}{2} \cdot \wp''(w) \cdot \frac{1}{\wp'(w)} \quad (54)$$

Damit verschwindet der Hauptteil von f um w .

- *Fall $z \in -w + L$.* Wir können uns auf $z = -w$ beschränken. Es bezeichne P die Grundmasche des Gitters L und ∂P ihren Rand. Mit der Behauptung 3 folgt

$$0 = \sum_{w_0 \in P} \text{Res}(f, w_0) \quad (55)$$

$$= \underbrace{\text{Res}(f, 0)}_{=a_{-1}} + \text{Res}(f, -w) \quad (56)$$

$$= -1 + \text{Res}(f, -w) \quad (57)$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, -w) = 1. \quad (58)$$

Die Funktion

$$g(z) = \wp(z) - \wp(w) \quad (59)$$

im Nenner von $f(z)$ hat in $-w$ eine einfache Nullstelle, denn

$$g'(-w) = \wp'(-w) \neq 0 \quad (60)$$

nach Wahl von $w \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}L$. Wertet man den Zähler des Ausdrucks $f(z)$ an $-w$ aus, so erhält man

$$\wp'(-w) - \wp'(w) = -2\wp'(w) \neq 0, \quad (61)$$

da $\wp'$ eine ungerade Funktion ist. Damit besitzt f in $-w$ eine einfache Polstelle, sodass wir die folgende Laurent-Reihe von f um $-w$ erhalten:

$$f(z) = \underbrace{1}_{=\text{Res}(f, -w)} \cdot (z + w)^{-1} + c + \mathcal{O}(z + w), \quad c \in \mathbb{C}. \quad (62)$$

Damit ist die Zwischenbehauptung bewiesen. ■

Sei P die Grundmasche des Gitters L . Wir betrachten die durch

$$g(z) = (f(z))^2 - \wp(z+w) - \wp(z) - \wp(w) \quad (63)$$

definierte elliptische Funktion und zeigen, dass g auf $\mathbb{C}$ holomorph ist. Dann ist g auf der kompakten Menge $\overline{P}$ beschränkt und wegen der Periodizität ist diese Schranke sogar global. Nach dem Satz von Liouville ist g dann konstant. Mit dem Nachweis von $g(0) = 0$ werden wir $g \equiv 0$ erhalten, was den Satz für $w \in C \setminus \frac{1}{2}L$ beweist.

Auf einer punktierten Umgebung um 0 gilt unter Verwendung der Laurent-Entwicklung von f um 0 (siehe (42)) und der Laurent-Reihe von $\wp$ um 0 (vgl. 2.11 [1])

$$g(z) = (f(z))^2 - \wp(z+w) - \wp(z) - \wp(w) \quad (64)$$

$$= (-z^{-1} - \wp(w)z + \mathcal{O}(z^2))^2 - \wp(z+w) - (z^{-2} + \mathcal{O}(z^2)) - \wp(w) \quad (65)$$

$$= \mathcal{O}(z) + \wp(w) - \wp(z+w) \quad (66)$$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = 0. \quad (67)$$

Damit gilt $g(0) = 0$. Insbesondere besitzt g in L keine Polstellen.

Als Singularitäten von g kommen nur noch Punkte $z \in -w + L$ in Frage. Wir zeigen, dass der Hauptteil bezüglich $-w$ von g verschwindet: Unter Verwendung der Laurent-Entwicklung von f um $-w$ (siehe (43)) und der Laurent-Reihe von $\wp$ um 0 (vgl. 2.11 [1]) gilt auf einer punktierten Umgebung von $-w$

$$g(z) = (f(z))^2 - \wp(z+w) - \wp(z) - \wp(w) \quad (68)$$

$$= ((z+w)^{-1} + c + \mathcal{O}(z+w))^2 - ((z+w)^{-2} + \mathcal{O}((z+w)^2)) - \wp(z) - \wp(w) \quad (69)$$

$$= 2c(z+w)^{-1} + \mathcal{O}(1) \quad (70)$$

Damit gilt

$$\text{Res}(g, -w) = 2c. \quad (71)$$

Unter Beachtung, dass wegen der Periodizität von g für alle $z \in -w + L$ die Residuen $\text{Res}(g, z)$ übereinstimmen, erhalten wir mit Behauptung 3

$$0 = \sum_{w_0 \in P} \text{Res}(g, w_0) = \text{Res}(g, -w). \quad (72)$$

Damit verschwindet der Hauptteil von g um den Punkt $-w$ und g ist eine holomorphe, elliptische Funktion, also konstant. Wegen $g(0) = 0$ gilt sogar $g \equiv 0$. Der Satz ist somit für $w \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}L$ bewiesen.

Wir betrachten nun zu $z \in \mathbb{C}$ die Funktion g in Abhängigkeit von w : Die Funktion

$$g(w) = (f_w(z))^2 - \wp(z+w) - \wp(z) - \wp(w) \quad (73)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} \right)^2 - \wp(z+w) - \wp(z) - \wp(w) \quad (74)$$

ist elliptisch und auf $\mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}L$ identisch 0. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist somit $g \equiv 0$.

Damit ist der Satz auch für $w \in \frac{1}{2}L$ bewiesen. $\square$

3.2 Die Verdoppelungsformel

Das Additionstheorem (Satz 5) deckt den Fall $z = w$ nicht ab. Für diesen Fall beweisen wir

Satz 6. Sind $z, 2z \notin L$, so gilt

$$\wp(2z) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} \right)^2 - 2\wp(z) \quad (\text{Verdoppelungsformel})$$

und

$$\wp(2z) = \frac{(\wp^2(z) + 15G_4)^2 + 280G_6\wp(z)}{4\wp^3(z) - 60G_4\wp(z) - 140G_6},$$

wobei $G_j = \sum_{w \in L \setminus \{0\}} w^{-j}$ die j -te Einsteinreihe bezeichne (zur Konvergenz der Reihe vgl. Hilfsatz 2.2 [1]).

Zunächst erkennt man

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} = \lim_{w \rightarrow z} \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{z - w} \cdot \frac{z - w}{\wp(z) - \wp(w)} = \frac{-\wp''(z)}{-\wp'(z)} = \frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}. \quad (75)$$

In der folgenden Rechnung sind alle vorkommenden Ausdrücke nahe z stetig. Mit dem Additionstheorem (Satz 5) folgern wir

$$\wp(2z) = \lim_{w \rightarrow z} \wp(z + w) = \lim_{w \rightarrow z} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} \right)^2 - \wp(z) - \wp(w) \right] \quad (76)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} \right)^2 - 2\wp(z). \quad (77)$$

Damit ist die Verdoppelungsformel bewiesen. In Satz 4 haben wir die Differentialgleichung

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - 60G_4\wp(z) + 140G_6 \quad (78)$$

bewiesen. Ableiten nach z und kürzen durch $2\wp'(z) \neq 0$ (beachte $z \notin \frac{1}{2}L$) ergibt

$$\wp''(z) = 6\wp^2(z) - 30G_4. \quad (79)$$

Wir erhalten durch Einsetzen in die bereits bewiesene Verdoppelungsformel

$$\wp(2z) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} \right)^2 - 2\wp(z) \quad (80)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{(6\wp^2(z) - 30G_4)^2}{4\wp^3(z) - 60G_4\wp(z) + 140G_6} - 2\wp(z) \quad (81)$$

$$= \frac{(\wp^2(z) + 15G_4)^2 + 280G_6\wp(z)}{4\wp^3(z) - 60G_4\wp(z) - 140G_6} \quad (82)$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Anmerkung: Wenn nicht anders angegeben, orientiert sich die Darstellung des Themas an dem Kapitel §5.1 aus [1].

Quellenverzeichnis

- [1] Eberhard Freitag and Rolf Busam. *Funktionentheorie 1*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. ISBN: 978-3-540-32058-6.
- [2] Max Koecher. *Elliptische Funktionen und Modulformen*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. ISBN: 978-3-540-49325-9.