Universität Hamburg
Janko Latschev
Andreas Gerstenberger

Winter 2012/13

Symplektische Geometrie

Übungsblatt 7

1. Wir betrachten eine fast-komplexe Struktur J auf einer zusammenhängenden offenen Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^{2n}$.

a) Ist $f : U \to \mathbb{C}$ J-holomorph, d.h. gilt $df \circ J = i \circ df$, so ist für jedes $p \in U$ $\operatorname{rank} df_p$ entweder 0 oder 2, und $\ker df \subset TU$ ist abgeschlossen unter der Lieklammer.

b) Das Bild des Nijenhuis-Tensors N_J ist in $\ker df$ enthalten.

c) Finden Sie für $n = 2$, also $U \subset \mathbb{R}^4$, eine fast-komplexe Struktur J, so dass es *keine* nichtkonstanten J-holomorphen Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ gibt!

2. Beweisen Sie:

a) Es gibt eine symplektische Einbettung von $(\mathbb{R}^4, \omega_{\text{st}} = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2)$ in die Teilmenge

$$M := \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\} \subset (\mathbb{R}^4, \omega_{\text{st}}).$$

b) Ist c eine beliebige normalisierte symplektische Kapazität und c_G die Gromov-Weite, so gilt für jede symplektische Mannigfaltigkeit

$$c_G(M, \omega) \leq c(M, \omega).$$

3. Sei $C := [-1, 1]^4 \subset (\mathbb{R}^4, \omega_{\text{st}})$ der Würfel mit Kantenlänge 2. Dieser enthält den Ball $B^4(0, 1)$ als Teilmenge.

a) Zeigen Sie, dass diese Einbettung nicht die Gromov-Weite realisiert, indem Sie eine explizite Hamiltonsche Isotopie φ_t konstruieren, so dass $\varphi_\epsilon(\overline{B^4(0, 1)})$ für $\epsilon > 0$ klein den Rand von C nicht berührt. Warum hilft das?

b) Versuchen Sie einen Symplektomorphismus $B^2(0, \frac{2}{\sqrt{\pi}}) \to (-1, 1)^2$ (bezüglich $\omega_{\text{st}} = dx \wedge dy$) zu konstruieren!
Hinweis: Explizite Formeln sind hier schwierig. Formulieren Sie daher eine möglichst präzise geometrische Idee!

c) Benutzen Sie die Existenz einer Abbildung wie in Teil **b)** und den Starrheitssatz von Gromov, um zu beweisen, dass $c_G(C) = 4$.