Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

# Seminar “Elementare Differentialtopologie”

**Wintersemester 2011/12**

Janko Latschev

Stellen Sie sich bitte aus den jeweils angegebenen Quellen das Material für Ihren Vortrag zusammen. Falls Ihnen die Literaturangaben nicht ausreichen oder Sie sonst Fragen zu Ihrem Vortrag haben, dann kommen Sie bitte rechtzeitig zu mir. Konzipieren Sie den Vortrag für ca. 70 Minuten, damit noch Zeit für Fragen, Diskussion und Ergänzungen bleibt, und überlegen Sie sich eine kurze Aufgabe für die Zuhörer passend zu Ihrem Thema.
Geben Sie mir bitte zwei Wochen vor dem Termin Ihres Vortrags eine Ausarbeitung ab (handschriftlich genügt).

## Vorträge

(1) **Einführung zu glatten Untermannigfaltigkeiten** Wiederholen Sie aus der Analysis III (?) glatte Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, deren Tangentialraum, Abbildungen zwischen Untermanngifaltigkeiten und deren Differentiale. Definieren Sie reguläre Werte und geben Sie Milnor’s Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. [Mi, §1]

(2) **Glatte Mannigfaltigkeiten als Untermannigfaltigkeiten** Stellen Sie den Begriff der glatten Mannigfaltigkeit vor, und beweisen Sie den Einbettungssatz für kompakte Mannigfaltigkeiten, der uns erlaubt, in den nächsten Kapiteln ohne wesentliche Einschränkung wie in Milnor’s Buch nur Untermannigfaltigkeiten zu betrachten. [MT, §8]

(3) **Der Satz von Sard** Stellen Sie den Satz von Sard vor. Beweisen Sie, dass Urbilder regulärer Werte Untermannigfaltigkeiten sind, und verallgemeinern Sie diese Aussage für Mannigfaltigkeiten mit Rand. Beweisen Sie als Anwendung den Brouwerschen Fixpunktsatz. [Mi, §2]

(4) **Beweis des Satzes von Sard** Formulieren Sie die scharfe Version des Satzes von Sard, diskutieren Sie Whitneys Beispiel, das die Optimalität der Differenzierbarkeisvoraussetzungen zeigt, und geben Sie Milnors Beweis für die einfachere glatte Version. [Mi, §3], [Hi, §3.1], [Wh]

(5) **Transversalität** Führen Sie den Begriff der Transversalität ein, und beweisen Sie einerseits, dass transverse Urbilder stets Untermannigfaltigkeiten sind, sowie andererseits den Transversalitätssatz, der im Wesentlichen sagt, dass “typische” Abbildungen transvers zu vorgegebenen Untermannigfaltigkeiten sind.
[GP, §1.5 und §2.3]

(6) **Der Abbildungsgrad** $\mod 2$ Erläutern Sie die Begriffe der glatten Homotopie und glatten Isotopie, beweisen Sie Milnors Homogenitätslemma und zeigen Sie, dass der Abbildungsgrad $\mod 2$ für kompakten Definitionsbereich wohldefiniert ist. [Mi, §4]

(7) **Der ganzzahlige Abbildungsgrad** Diskutieren Sie orientierbare und orientierte (Unter-)Mannigfaltigkeiten, und definieren Sie den ganzzahligen Abbildungsgrad und beweisen Sie Milnors Theoreme A und B. Diskutieren Sie auch erste Beispiele. [Mi, §5]

(8) **Verschlingungszahlen** Diskutieren Sie die Definition der Verschlingungszahl zweier Untermannigfaltigkeiten $J$ und $K$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $\dim J + \dim K = n$ mit Hilfe des Abbildungsgrades der Gaußabbildung. Beweisen Sie deren elementare Eigenschaften wie in [MT, S. 102–106]. Zeigen Sie die Äquivalenz zur kombinatorischen Definition wie z.B. in [Li, S. 33], und diskutieren Sie Beispiele.

(9) **Vektorfelder und die Eulercharakteristik I** Definieren Sie den Index einer isolierten Nullstelle eines Vektorfeldes, geben Sie Beispiele und zeigen Sie, dass die Indexsumme auf einer kompakten Mannigfaltigkeit ohne Rand nicht vom gewählten Vektorfeld abhängt. [MT, S.106-112], [Mi, §6]

(10) **Vektorfelder und die Eulercharakteristik II** Formulieren Sie den Satz von Poincaré und Hopf (dazu müssen Sie insbesondere die Definition der de-Rham-Kohomologie “wiederholen”) und diskutieren Sie dessen Beweis.
[Mi, §6], [MT, §12]

(11)/(12) **Gerahmte Kobordismen und die Pontrjagin-Konstruktion** Führen Sie den Begriff des gerahmten Kobordismus ein und beweisen Sie, dass die Menge der Homotopieklassen differentierbarer Abbildungen $f : M^m \to S^p$ bijektiv zur Menge der gerahmten Kobordismusklassen von geschlossenen gerahmten Untermannigfaltigkeiten der Kodimension $p$ in $M$ ist. (Idealerweise bereiten zwei Vortragende diese Vorträge gemeinsam vor, da die Abstimmung hier wichtig ist.)
[Mi, §7]

## References


[GP] Guillemin, V. und Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974

[Hi] Hirsch, M.W., *Differential Topology*, Graduate Texts in Math 33, Springer, corr. 4th printing, 1991

[Li] Livingston, C., *Knotentheorie für Einsteiger*, vieweg, 1995

[MT] Madsen, I. und Tornehave, J., *From Calculus to Cohomology*, Cambridge University Press, 1997

[Mi] Milnor, J.W., *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, 1969

[Wh] Whitney, H. *A function not constant on a connected set of critical points*, Duke Math. J. 1, 514–517, 1935