Universität Hamburg
Janko Latschev
Leonardo García Heveling

Sommer 2025

Funktionentheorie

Übungsblatt 9

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

Da wir in dieser Woche nicht sehr viel neuen Stoff zu üben haben, nutzen wir die Gelegenheit für einen kleinen Rückblick auf die bisherigen Themen.

(P27) Welche Inhalte der Vorlesung haben Ihnen bisher am besten gefallen?

(P28) Was waren bisher die wichtigsten Themen und Aussagen?

(P29) Was waren bisher die wichtigsten Beweistechniken?

(P30) Welche Rechnungen und Konstruktionen haben wir bisher kennengelernt?

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 16.6. in der Vorlesung.

(A37) **a)** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $L \subset \mathbb{C}$ eine Gerade. Beweisen Sie: Ist $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und auf $U \setminus L$ holomorph, so ist f auf ganz U holomorph.
Hinweis: Erinnern Sie sich an die relevanten Aussagen aus Kapitel 2.

b) (Schwarzsches Spiegelungsprinzip) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und symmetrisch bezüglich $\mathbb{R}$, d.h. $z \in U$ genau dann, wenn $\overline{z} \in U$. Wir setzen $U_+ := U \cap \mathbb{H} = \{z \in U \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ und $U_\mathbb{R} := U \cap \mathbb{R}$. Beweisen Sie:
Ist $f : U_+ \cup U_\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und auf U_+ holomorph und gilt $f(U_\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, so existiert eine holomorphe Funktion $\widetilde{f} : U \to \mathbb{C}$ mit $f = \widetilde{f}|_{U_+ \cup U_\mathbb{R}}$.
Hinweis: Erinnern Sie sich an Aufgabe (A7) von Blatt 2.

c) Sei $Q \subset \mathbb{C}$ der offene erste Quadrant, d.h.

$$Q := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \text{ und } \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Bestimmen Sie alle Automorphismen von Q, welche sich stetig auf den Rand

$$\partial Q = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \mathbf{i}\mathbb{R}_{\geq 0}$$

fortsetzen.

d) Können Sie einen Automorphismus von Q angeben, der keine solche stetige Fortsetzung besitzt?

(A38) **a)** Begründen Sie, warum jeder Automorphismus $\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ der oberen Halbebene die Einschränkung einer Möbiustransformation (also eines Automorphismus von $\overline{\mathbb{C}}$) auf $\mathbb{H}$ ist.

b) Beweisen Sie die in der Vorlesung aufgestellte Behauptung, dass

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{H}) = PSL(2, \mathbb{R}) \subseteq PSL(2, \mathbb{C}) = \operatorname{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$$

genau aus denjenigen Möbiustransformationen besteht, die sich mit reellen Koeffizienten beschreiben lassen und positive Determinante besitzen.

c) Beschreiben Sie die Untergruppe aller Automorphismem $\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ mit $\varphi(\mathbf{i}) = \mathbf{i}$.

(A39) Beweisen Sie die folgende Formel für den hyperbolischen Abstand zweier Punkte $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$: Sind $a, b \in S^1$ die Schnittpunkte mit S^1 des eindeutigen (verallgemeinerten) Kreises durch z_0 und z_1, welcher senkrecht auf S^1 steht, so gilt

$$d_h(z_0, z_1) = |\log(\operatorname{DV}(a, z_0, b, z_1))|.$$