Universität Hamburg
Janko Latschev
Leonardo García Heveling

Sommer 2025

Funktionentheorie

Übungsblatt 8

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P24) Zeigen Sie:

a) Drei paarweise verschiedene Punkte in $\overline{\mathbb{C}}$ liegen auf einem eindeutig bestimmten verallgemeinerten Kreis in $\overline{\mathbb{C}}$.

b) Vier paarweise verschiedene Punkte in $\overline{\mathbb{C}}$ liegen genau dann auf einem verallgemeinerten Kreis, wenn ihr Doppelverhältnis reell ist.

(P25) **a)** Bestimmen Sie die reelle Konstante $c < 0$ so, dass die Punkte -3, 3, $\mathbf{i}$ und $c\mathbf{i}$ auf einem Kreis liegen.

b) Gibt es eine Möbiustransformation, die den Einheitskreis auf sich selbst abbildet und den Kreis um 0 vom Radius $\frac{1}{2}$ auf den Kreis um $\frac{1}{4}$ vom Radius $\frac{1}{4}$ abbildet?

(P26) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol der Ordnung k in z_0. Außerdem sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\varphi : G \to U$ holomorph und nicht konstant mit $\varphi(w_0) = z_0$. Welchen Typ hat die Singularität w_0 von $f \circ \varphi$?

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 10. und 11.6. in den Übungen.

(A33) Wir nennen zwei Möbiustransformationen φ_1 und φ_2 *zueinander konjugiert*, falls es eine weitere Möbiustransformation ψ gibt, so dass

$$\varphi_2 \circ \psi = \psi \circ \varphi_1.$$

Zeigen Sie:

a) Jede Möbiustransformation $\varphi \neq \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{C}}}$ besitzt entweder genau einen oder genau zwei Fixpunkte in $\overline{\mathbb{C}}$.

b) Hat die Möbiustransformation φ genau einen Fixpunkt, so ist φ konjugiert zu $z \mapsto z + 1$.

c) Hat die Möbiustransformation φ genau zwei Fixpunkte, so ist φ konjugiert zu $z \mapsto \alpha z$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Inwiefern bestimmt φ die Konstante α?

(A34) Wieviele verschiedene Werte kann das Doppelverhältnis höchstens annehmen, wenn man stets die gleichen vier Punkte in verschiedenen Reihenfolgen betrachtet? Wieviele verschiedene Werte nimmt es mindestens an?

(A35) Seien $f : \mathbb{D} \to G$ und $g : \mathbb{D} \to G$ zwei holomorphe Abbildungen von der Einheitskreisscheibe in das Gebiet G mit $f(0) = g(0)$. Beweisen Sie: Ist f injektiv mit $f(\mathbb{D}) = G$, so gilt $g(B(0,r)) \subset f(B(0,r))$ für alle $0 < r \leq 1$.

(A36) Beweisen Sie das Lemma von Schwarz und Pick:
Ist $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph, so gilt

$$\frac{|\psi(z) - \psi(z_0)|}{|1 - \overline{\psi(z_0)}\psi(z)|} \leq \frac{|z - z_0|}{|1 - \overline{z}_0 z|}.$$

Folgern Sie daraus, dass für jede holomorphe Abbildung $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ und für alle $z \in \mathbb{D}$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{|\psi'(z)|}{1 - |\psi(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Hinweis: Führen Sie die Aussage auf das Lemma von Schwarz zurück.