Kapitel 3

Geometrie auf Liegruppen

Sei G eine Liegruppe und $\mathfrak{g} = T_eG$ ihre Liealgebra. Da sowohl Linksmultiplikation wie auch Rechtsmultiplikation mit einem Gruppenelement $g \in G$ ein Diffeomorphismus von G auf sich selbst ist, ist auch die Konjugation

$$\begin{aligned} C_g : G &\to G \\ h &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus. Außerdem gelten

$$C_{g_1}C_{g_2} = C_{g_1g_2} \qquad \text{und} \qquad C_g(e) = e \tag{3.1}$$

für alle $g_1, g_2, g \in G$. Die Abbildung $g \mapsto C_g$ ist also ein Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Diff}(G, e)$ in die Teilmenge der Diffeomorphismengruppe von G, die $e \in G$ fixiert. Insbesondere ist dann für jedes $g \in G$ das Differential von C_g in der Identität $e \in G$ eine Abbildung

$$\mathrm{Ad}_g := (C_g)_{*,e} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}.$$

Da Links- und Rechtsmultiplikation mit Elementen von G miteinander kommutieren, haben wir

$$C_g = R_{g^{-1}}L_g = L_gR_{g^{-1}},$$

und somit

$$\mathrm{Ad}_g = (L_g)_*(R_{g^{-1}})_* = (R_{g^{-1}})_*(L_g)_*.$$

Identifiziert man $\mathfrak{g}$ mit den linksinvarianten Vektorfeldern, so folgt

$$\mathrm{Ad}_g X = (R_{g^{-1}})_*X.$$

Aus (3.1) folgt auch, dass

$$\mathrm{Ad}_{g_1} \mathrm{Ad}_{g_2} = \mathrm{Ad}_{g_1g_2}, \tag{3.2}$$

d.h. auch die Abbildung $g \mapsto \mathrm{Ad}_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Definition 1. Der Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : G &\to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto \mathrm{Ad}_g \end{aligned}$$

heißt *adjungierte Darstellung von G auf $\mathfrak{g}$*.

Beispiel 1. *Für $G = GL(n, \mathbb{R})$ (und deshalb auch für jede Untergruppe, also für alle Matrixgruppen) gilt*

$$\mathrm{Ad}_g(\xi) = g\xi g^{-1},$$

denn da Matrixmultiplikation linear in beiden Faktoren ist, wissen wir $(L_g)_* = L_g$ und $(R_{g^{-1}})_*) = R_{g^{-1}}$.

Aus $C_e = \mathbb{1}_G : G \to G$ folgt $\mathrm{Ad}_e = \mathbb{1}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, so dass das Differential $\mathrm{Ad}_{*,e}$ der adjungierten Darstellung eine Abbildung

$$\mathrm{ad} := \mathrm{Ad}_{*,e} : \mathfrak{g} \to T_{\mathbb{1}}\,\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{End}(\mathfrak{g}).$$

Lemma 1. *Die Abbildung* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ *hat die Form*

$$\mathrm{ad}_\xi(\eta) = [\xi, \eta].$$

Beweis. Um die Wirkung von $\xi \in \mathfrak{g}$ auf $\eta \in \mathfrak{g}$ zu bestimmen, betrachten wir die Wirkung der Kurve $t \mapsto \exp(t\xi)$ in G mittels Ad auf η. Sei dafür Y das linksinvariante Vektorfeld auf G mit $Y_e = \eta$. Dann gilt

$$\mathrm{ad}_\xi(\eta) = \frac{d}{dt}\big(\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)}\,\eta\big)\,|_{t=0} = \frac{d}{dt}\big((R_{\exp(-t\xi)})_*(L_{\exp(t\xi)})_*\eta\big)\,|_{t=0} = \frac{d}{dt}\big((R_{\exp(-t\xi)})_*Y\big)\,|_{t=0}.$$

Wir betrachten nun das linksinvariante Vektorfeld X mit $X_e = \xi$. Wegen

$$R_{\exp(t\xi)}g = g \cdot \exp(-t\xi) = L_g \exp(t\xi)$$

sehen wir, dass

$$\frac{d}{dt}\big(R_{\exp(t\xi)}g\big) = \frac{d}{dt}\left(L_g \exp(t\xi)\right) = (L_g)_*\frac{d}{dt}(\exp(t\xi)) = (L_g)_*X = X,$$

d.h. der Fluss des Vektorfeldes X hat die Form

$$\phi_t(g) = R_{\exp(t\xi)}g.$$

Daraus folgt aber

$$\mathrm{ad}_\xi(\eta) = \frac{d}{dt}\big((R_{\exp(-t\xi)})_*Y\big)\,|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left((\phi_{-t})_*Y\right)|_{t=0} = [X, Y],$$

und mit der Identifikatin von $\mathfrak{g} = T_eG$ mit den linksinvarianten Vektorfeldern folgt die Behauptung des Lemmas. □

Sei nun $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ ein positiv definites Skalarprodukt auf der Liealgebra $\mathfrak{g}$ der Gruppe G. Dieses induziert eine linksinvariante Metrik h auf G. Wir bezeichnen mit ad_ξ^* die bezüglich des Skalarprodukts $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ zu ad_ξ adjungierte Abbildung, die durch die Gleichung

$$\langle \mathrm{ad}_\xi^*\,\eta, \zeta\rangle = \langle \eta, \mathrm{ad}_\xi\,\zeta\rangle$$

bestimmt ist. Mit Hilfe linksinvarianter Vektorfelder lässt sich diese Identität alternativ in der Form

$$h(\mathrm{ad}_X^*\,Y, Z) = h(Y, \mathrm{ad}_X\,Z)$$

schreiben.

Proposition 2. *Ist h eine linksinvariante Metrik auf der Liegruppe G, so hat der Levi-Civita-Zusammenhang von h auf linksinvarianten Vektorfeldern $X, Y \in \Gamma(TG)$ die Form*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}\left([X,Y] - \operatorname{ad}_X^* Y - \operatorname{ad}_Y^* X\right). \tag{3.3}$$

Insbesondere sind die Integralkurven eines linksinvarianten Vektorfeldes X genau dann Geodätische, wenn $\operatorname{ad}_X^* X = 0$.

Beweis. Für linksinvariante Vektorfelder X, Y und Z vereinfacht sich die Koszulformel zu

$$\begin{aligned} 2h(\nabla_X Y, Z) &= \underbrace{X h(Y,Z) + Y h(Z,X) - Z h(X,Y)}_{=0 \text{ weil } h \text{ linksinvariant}} \\ &\quad + h(Z,[X,Y]) + h(Y,[Z,X]) - h(X,[Y,Z]) \\ &= h([X,Y],Z) - h(Y, \operatorname{ad}_X Z) - h(X, \operatorname{ad}_Y Z) \\ &= h([X,Y],Z) - h(\operatorname{ad}_X^* Y, Z) - h(\operatorname{ad}_Y^* X, Z), \end{aligned}$$

was die Formel (3.3) beweist. Wegen $[X,X] = 0$ folgt dann

$$\nabla_X X = -\operatorname{ad}_X^* X,$$

und dies beweist auch die zweite Aussage. □

Beispiel 2. *Wir betrachten die Gruppe $G = SL(2,\mathbb{R})$ mit der Liealgebra*

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{\xi \in \operatorname{Mat}(2,\mathbb{R}) \mid \operatorname{Tr}\xi = 0\}.$$

Als Basis von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ wählen wir

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$[\xi,\zeta] = -2\xi, \quad [\eta,\zeta] = 2\eta \quad \textit{und} \quad [\xi,\eta] = \zeta.$$

In der Basis (ξ,η,ζ) haben die Endomorphismen ad_ξ, ad_η und ad_ζ also folgende Matrixdarstellungen:

$$\operatorname{ad}_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{ad}_\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \operatorname{ad}_\zeta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir die Metrik h, für die ξ, η und ζ eine Orthonormalbasis bilden, so sind die Matrixdarstellungen der adjungierten Abbildungen einfach durch die transponierten Matrizen gegeben, d.h. es gilt

$$\operatorname{ad}_\xi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{ad}_\eta^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \operatorname{ad}_\zeta = \operatorname{ad}_\zeta^*.$$

Insbesondere gilt also

$$\operatorname{ad}_\xi^* \xi = -2\zeta \qquad \textit{und} \qquad \operatorname{ad}_\eta^* \eta = 2\zeta,$$

d.h. die Integralkurven der zu ξ und η gehörenden linksinvarianten Vektorfelder X und Y sind keine *Geodätischen.* **Also stimmt in diesem Fall die Exponentialabbildung der Liegruppe, die ja über die Integralkurven der linksinvarianten Vektorfelder definiert ist, nicht mit der Riemannschen Exponentialabbildung, die über die Geodätischen definiert ist, überein.**

Damit die Exponentialabbildung der Metrik h mit der Exponentialabbildung der Gruppe übereinstimmt, genügt es also *nicht*, dass die Metrik linksinvariant ist.

Definition 2. Eine Metrik h auf einer Liegruppe G heißt *biinvariant*, wenn sie sowohl unter Linkstranslationen als auch unter Rechtstranlationen invariant ist.

Lemma 3. *Eine linksinvariante Metrik h auf G ist genau dann biinvariant, wenn das Skalarprodukt h_e auf der Liealgebra* Ad*-invariant ist.*

Beweis. Ist h linksinvariant, so gilt

$$h(\operatorname{Ad}_g \xi, \operatorname{Ad}_g \eta) = h((R_{g^{-1}})_*(L_g)_*\xi, (R_{g^{-1}})_*(L_g)_*\eta) = h((R_{g^{-1}})_*X_g, (R_{g^{-1}})_*Y_g),$$

d.h. Ad-Invarianz von h_e ist dann äquivalent zur Rechtsinvarianz von h. □

Lemma 4. *Ist h eine biinvariante Metrik auf G, so gilt*

$$\operatorname{ad}_\xi^* = -\operatorname{ad}_\xi \qquad \text{für alle } \xi \in \mathfrak{g}.$$

Beweis. Es gilt

$$h(\operatorname{ad}_\xi \eta, \zeta) = \frac{d}{dt} h(\operatorname{Ad}_{\exp(t\xi)} \eta, \zeta)|_{t=0} \overset{\star}{=} \frac{d}{dt} h(\eta, \operatorname{Ad}_{\exp(-t\xi)} \zeta)|_{t=0} = h(\eta, -\operatorname{ad}_\xi \zeta),$$

wobei wir für die Gleichung $\star$ die Ad-Invarianz von h_e verwenden. □

Als direkte Folgerung erhalten wir

Folgerung 1. *Ist h eine biinvariante Metrik auf der Liegruppe G, so hat der Levi-Civita-Zusammenhang für linksinvariante Vektorfelder X und Y die Form*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]. \tag{3.4}$$

Insbesondere erfüllen alle linksinvarianten Vektorfelder X die Gleichung $\nabla_X X = 0$.

Beweis. Wegen

$$\operatorname{ad}_\xi^* \eta = -\operatorname{ad}_\xi \eta = -[\xi, \eta]$$

haben wir für die linksinvarianten Fortsetzungen X und Y von ξ und η mit (3.3)

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}\left([X, Y] + [X, Y] + [Y, X]\right) = \frac{1}{2}[X, Y].$$

Die zweite Behauptung ist mit dieser Formel offensichtlich, da $[X, X] = 0$. □

Als weitere Konsequenz erhalten wir

Folgerung 2. *Ist h eine biinvariante Metrik auf einer Liegruppe G, so sind die Geodätischen des Levi-Civita-Zusammenhangs gerade die Integralkurven der linksinvarianten Vektorfelder, d.h. jede Geodätische ist von der Form*

$$t \mapsto g \cdot \exp(t\xi) \qquad \textit{für } g \in G, \xi \in \mathfrak{g}.$$

Insbesondere stimmen für biinvariante Metriken die beiden Exponentialabbildungen überein. □

Beispiel 3. *Auf* $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ *betrachten wir die symmetrische Bilinearform*

$$B(\xi, \eta) = \mathrm{Tr}(\xi^T \eta).$$

Unter der Identifikation $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ entspricht dies gerade dem Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n^2}$, d.h. B ist positiv definit. Da wir gesehen haben, dass auf $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ die Formel

$$\mathrm{Ad}_g(\xi) = g\xi g^{-1}$$

gilt, haben wir

$$B(\mathrm{Ad}_g \xi, \mathrm{Ad}_g \eta) = \mathrm{Tr}((g^{-1})^T \xi^T g^T g\eta g^{-1}).$$

Ist also $g \in O(n)$, so folgt wegen $g^T g = \mathbb{1}$ und der Konjugationsinvarianz der Spur

$$B(\mathrm{Ad}_g \xi, \mathrm{Ad}_g \eta) = \mathrm{Tr}(\underbrace{(g^{-1})^T}_{=g} \xi^T \eta g^{-1}) = \mathrm{Tr}(\xi^T \eta) = B(\xi, \eta).$$

Wir sehen also, dass auf jeder Untergruppe $G \subseteq O(n)$ die linksinvariante Fortsetzung von B eine biinvariante Metrik auf G definiert. Für jede solche Untergruppe stimmen dann die Exponentialabbildung der Gruppe und die Exponentialabbildung der aus B erhaltenen Metrik auf G überein.

Bemerkung. Tatsächlich kann man jede kompakte Matrixgruppe G als Untergruppe von $O(N)$ für geeignetes $N \in \mathbb{N}$ realisieren. Beispiele dafür sind $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ oder auch Produkte solcher Gruppen.

Für die Krümmung einer biinvarianten Metrik auf einer Liegruppe gibt es eine sehr einfache Beschreibung.

Proposition 5. *Ist h eine biinvariante Metrik auf der Liegruppe G, so gilt für alle linksinvarianten Vektorfelder X, Y, Z und W*

$$h(R(X, Y)Z, W) = -\frac{1}{4} h([X, Y], [Z, W]).$$

Beweis. Mit der Formel (3.4) für die kovariante Ableitung auf linksinvarianten Vektorfeldern sehen wir

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \frac{1}{4}[X, [Y, Z]] - \frac{1}{4}[Y, [X, Z]] - \frac{1}{2}[[X, Y], Z] \\ &= \frac{1}{4}[Z, [X, Y]] + \frac{1}{4} \underbrace{([X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]])}_{=0 \text{ mit der Jacobi-Identität}} \\ &= \frac{1}{4}[Z, [X, Y]]. \end{aligned}$$

Also folgt wegen $\operatorname{ad}_Z^* = -\operatorname{ad}_Z$ auch

$$h(R(X,Y)Z,W) = \frac{1}{4}h([Z,[X,Y]],W) = -\frac{1}{4}h([X,Y],[Z,W]).$$

□

Folgerung 3. *Ist h eine biinvariante Metrik auf der Liegruppe G und bildern die beiden Elemente ξ und η der Liealgebra $\mathfrak{g}$ eine Orthonormalbasis der Ebene $\sigma \subseteq \mathfrak{g}$, so gilt für die Schnittkrümmung*

$$K(\sigma) = \frac{1}{4}\,\|[\xi,\eta]\|_h^2\,.$$

Insbesondere sind alle Schnittkrümmungen einer biinviarianten Metrik auf einer Liegruppe nichtnegativ.

Beweis. In diesem Fall gilt

$$K(\sigma) = h(R(\xi,\eta)\eta,\xi) = \frac{1}{4}\|[\xi,\eta]\|_h^2.$$

□

Beispiel 4. *Für $G = SU(2)$ haben wir in den Übungen eine Basis der Liealgebra $\mathfrak{su}(2)$ kennengelernt:*

$$I = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben dort berechnet, dass $[I,J] = 2K$, $[J,K] = 2I$ und $[K,I] = 2J$. Man kann nachrechnen, dass die Metrik h, für die I, J und K eine Orthonormalbasis der Liealgebra $\mathfrak{su}(2)$ bilden, biinvariant ist. Mit der Proposition folgt dann, dass für diese Metrik alle Schnittkrümmungen gleich 1 sind. In der Tat ist der in den Übungen betrachtete Diffeomorphismus $S^3 \cong SU(2)$ sogar eine Isometrie von $(SU(2),h)$ zur Standardmetrik auf S^3.

Viele interessante Beispiele von Riemannschen Mannigfaltigkeiten treten als homogene Räume auf, d.h. als Quotienten G/H einer Liegruppe G nach einer Untergruppe H. Für solche *Riemannschen Submersionen* ist die Schnittkrümmung einer 2-dimensionalen Tangentialebene $\sigma \in T_{[g]}G/H$ im Quotienten stets mindestens so groß wie die Schnittkrümmung ihres horizontalen Lifts (definiert als die eindeutige Ebene $\widetilde{\sigma} \in T_gG$, die orthogonal zu $T_g(gH) = \ker \pi_{*,g}$ ist und unter dem Differential der Projektion $\pi : G \to G/H$ auf σ abgebildet wird).

Beispiel 5. *Die Gruppe $U(n+1)$ wirkt transitiv und isometrisch auf der Sphäre $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$, und der Stabilisator eines Punktes ist isomorph zu $U(n) \subseteq U(n+1)$. Dies liefert einen Diffeomorphismus*

$$S^{2n+1} \cong U(n+1)/U(n).$$

Den komplexen projektiven Raum $\mathbb{C}P^n$ erhält man, indem man zusätzlich noch die (Links-)Wirkung der diagonalen Untergruppe $U(1) \subseteq U(n+1)$ herausteilt, also als

$$\mathbb{C}P^n = U(1)\backslash U(n+1)/U(n).$$

Da die Linksmultiplikation mit $\lambda \in U(1)$ *und die Rechtsmultiplikation mit* $A \in U(n)$ *kommutieren (und beide isometrisch bezüglich der biinvarianten Metrik auf* $U(n+1)$ *sind), erhalten wir auf diese Weise eine Metrik auf* $\mathbb{C}P^n$*, die sogenannte* Fubini-Study-Metrik*. Diese Metrik hat sogar strikt positive Schnittkrümmung (in einer der üblichen Normierungen gilt* $1 \leq K \leq 4$*).*