Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2017

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 7

Präsenzaufgaben

(P15) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und ∇ ein Zusammenhang auf TM.

a) Beweisen Sie, dass die *Krümmung*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

ein $(3,1)$-Tensorfeld auf M ist!

b) Drücken Sie in lokalen Koordinaten $(x_1, \dots, x_n)$ die Komponenten T_{ij}^k und R_{ijk}^ℓ in den Ausdrücken

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_k T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{und} \quad R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_\ell R_{ijk}^\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

für Torsion und Krümmung mit Hilfe der Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k aus.

(P16) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie:

a) Sind ∇^0 und ∇^1 zwei kovariante Ableitungen auf TM, so ist für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\nabla^t := t\nabla^1 + (1-t)\nabla^0$$

ebenfalls eine kovariante Ableitung.

b) Ist ∇ eine kovariante Ableitung auf TM mit Torsion T, so ist

$$\widetilde{\nabla}_X Y := \nabla_X Y - \frac{1}{2} T(X,Y)$$

eine kovariante Ableitung auf TM mit verschwindender Torsion.

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Do, 13.6., in der Vorlesung

(A19) Sei G eine Liegruppe und ∇ die linksinvariante kovariante Ableitung, die mit Hilfe eines Rahmens aus linksinvarianten Vektorfeldern $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ durch

$$\nabla_X(\sum_j \alpha_j Z_j) := \sum_j (X\alpha_j) Z_j$$

definiert ist.

a) Bestimmen Sie Torsion und Krümmung von ∇.
Hinweis: Da T und R Tensorfelder sind, können Sie sich die Rechnung hier durch geeignete Wahlen sehr einfach machen.

b) Können Sie ∇ so verändern, dass die neue kovariante Ableitung $\widetilde{\nabla}$ verschwindende Torsion hat? Wie sieht der Krümmungstensor $\widetilde{R}$ dieser modifizierten kovarianten Ableitung aus?

(A20) Im Raum $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ der komplexen 2×2-Matrizen betrachten wir den *reellen* Unterraum $\mathbb{H}$, welcher von den vier Matrizen

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Beweisen Sie:

a) $\mathbb{H} \subset \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ ist ein Unterring, in dem jedes von 0 verschiedene Element invertierbar ist.

b) Unter der Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{H}$, $(x_1, \ldots, x_4) \mapsto x_1\mathbb{1} + x_2 I + x_3 J + x_4 K$ wird die Sphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ bijektiv auf die Untergruppe

$$SU(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) \mid A\overline{A}^T = \mathbb{1}, \det A = 1\} \subset \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$$

abgebildet.
Auf diese Weise erhält S^3 die Struktur einer Liegruppe.

c) Zeigen Sie, dass die Matrizen I, J und K eine Basis der Liealgebra $\mathfrak{su}(2) = T_{\mathbb{1}}SU(2)$ von $SU(2)$ bilden, und bestimmen Sie die paarweisen Lieklammern von I, J und K.

d) Sei ∇ die linksinvariante kovariante Ableitung auf $SU(2)$, wie sie für allgemeine Liegruppen in Aufgabe **(A19)** betrachtet wurde, und sei $\widetilde{\nabla}$ die modifizierte kovariante Ableitung wie in Teil **b)** dieser Aufgabe. Bestimmen Sie die folgenden Werte des Krümmungstensors von $\widetilde{\nabla}$, wobei X, Y und Z die zu $I, J, K \in \mathfrak{su}(2)$ gehördenden linksinvarianten Vektorfelder sind:

$$\widetilde{R}(X,Y)X, \quad \widetilde{R}(X,Y)Y \quad \text{und} \quad \widetilde{R}(X,Y)Z.$$

(A21) Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit der Standardkoordinate t und eine beliebige Konstante $c \in \mathbb{R}$ und definieren durch

$$\nabla_{\partial_t}\partial_t = c\partial_t$$

eine kovariante Ableitung ∇^c auf $T\mathbb{R}$. Bestimmen Sie für $a < b$ in $\mathbb{R}$ den Paralleltransport $P_\gamma : T_a\mathbb{R} \to T_b\mathbb{R}$ bezüglich dieser kovarianten Ableitung entlang der Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\gamma(t) = t$.
Hinweis: Der globaler Rahmen ∂_t für $T\mathbb{R}$ erlaubt uns die Identifikation $T_a\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \cong T_b\mathbb{R}$, d.h. mit diesen Identifikationen ist P_γ ein Isomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hat also die Form $\xi \mapsto \alpha\xi$ für ein $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ihre Aufgabe ist die Bestimmung der Konstante α in Abhängigkeit von $a, b, c \in \mathbb{R}$.