Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2024

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 6

1. Wir betrachten die Untergruppe $H \subseteq \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale, d.h.

$$H = \left\{ D = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Einträge $a, b, c \in \mathbb{R}$ oberhalb der Diagonale geben globale Koordinaten auf H, welche H mit $\mathbb{R}^3$ identifizieren.

a) Beschreiben Sie die linksinvarianten Vektorfelder X, Y und Z mit $X_e = \partial_a$, $Y_e = \partial_b$ und $Z_e = \partial_c$ in diesen Koordinaten.

b) Bestimmen Sie nun die paarweisen Lieklammern von X, Y und Z. Fällt Ihnen etwas auf?

2. Die Einbettung

$$\begin{aligned} h : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (r, \varphi, z) &\mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \end{aligned}$$

parametrisiert eine offene dichte Teilmenge in $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe der *zylindrischen Koordinaten* $(r, \varphi, z) \in (0,\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

a) Beschreiben Sie das Bild der Abbildung h.

b) Bestimmen Sie die Darstellung des Vektorfelds V mit $V_{(x,y,z)} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ und der Standard-Volumenform $\eta = dx \wedge dy \wedge dz$ in zylindrischen Koordinaten (gesucht sind also Ausdrücke für $(h^{-1})_*(V)$ und $h^*\eta$).

c) Bestimmen Sie die Lieableitung $L_V\eta$ (dies ist am einfachsten mit der Cartan-Formel).

d) Entlang $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ist V gerade das äußere Einheitsnormalenvektorfeld bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$, so dass die Einschränkung $\omega := (\iota_V\eta)|_{S^2}$ auf S^2 gerade die Standardvolumenform von S^2 ist. Da S^2 durch die Gleichung $r^2 + z^2 = 1$ charakterisiert ist, sind $(\varphi, z) \in (0, 2\pi) \times (-1, 1)$ lokale Koordinaten auf einer offenen dichten Teilmenge von S^2. Bestimmen Sie die Darstellung von ω in diesen Koordinaten und berechnen Sie damit das Volumen von S^2.

e) Bestimmen Sie aus den Ergebnissen von **c)** und **d)** mit Hilfe des Satzes von Stokes das Volumen des 3-dimensionalen Balles $B^3(0,1)$.

f) Verallgemeinern Sie **c)** und **e)** zu einer Beziehung zwischen dem Volumen des n-dimensionalen Balles $B^n(0,1)$ und dem Volumen der $n-1$-dimensionalen Sphäre $S^{n-1} = \partial B^n(0,1)$ für beliebiges $n \geq 2$.

Bitte wenden!

Bemerkung: Eine einfache Anwendung des Satzes von Fubini liefert zusammen mit der Skalierungseigenschaft $\mathrm{vol}(B^d(0,r)) = \mathrm{vol}(B^n(0,1)) \cdot r^d$ *die rekursive Formel*

$$\mathrm{vol}(B^n(0,1)) = \int_{B^2(0,1)} \mathrm{vol}(B^{n-2}(0, \sqrt{1-x^2-y^2}))\, dx\wedge dy = \mathrm{vol}(B^{n-2}(0,1))\cdot \int_{B^2(0,1)} (1-x^2-y^2)^{\frac{n-2}{2}}\, dx\wedge dy.$$

Das hier auftretende Integral lässt sich durch Übergang zu Polarkoordinaten leicht ausrechnen als

$$\int_{B^2(0,1)} (1-x^2-y^2)^{\frac{n-2}{2}}\, dx \wedge dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n-2}{2}}\, r dr \wedge d\varphi = \frac{2\pi}{n}.$$

Daraus folgen per Induktion mit dem Induktionsanfang $\mathrm{vol}(B^0(0,1)) = 1$ *und* $\mathrm{vol}(B^1(0,1)) = 2$ *die expliziten Formeln*

$$\mathrm{vol}(B^{2k}(0,r)) = \frac{\pi^k}{k!} r^{2k} \qquad \textit{und}$$
$$\mathrm{vol}(B^{2k+1}(0,r)) = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)} r^{2k+1}.$$

Mit Teil **f)** *der Aufgabe erhalten Sie daraus auch allgemeine Formeln für das Volumen einer runden Sphäre beliebiger Dimension.*

3. Auf $M = T^*\mathbb{R}^n$ betrachten wir die von den Standardkoordinaten $(q_1, \dots, q_n)$ auf $\mathbb{R}^n$ induzierten kanonischen Koordinaten $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$. Wie in der Vorlesung erwähnt hat die kanonischen symplektische Form $\omega = \omega_{\mathrm{can}} \in \Omega^2(T^*\mathbb{R}^n)$ in diesen Koordinaten die Form

$$\omega = d\lambda_{\mathrm{can}} = d\left(\sum_{j=1}^n p_j\, dq_j\right) = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j.$$

a) Jeder Diffeomorphismus $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ induziert einen faserweise linearen Diffeomorphismus $\Psi : T^*\mathbb{R}^n \to T^*\mathbb{R}^n$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} T^*\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Psi} & T^*\mathbb{R}^n \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Finden Sie eine Formel für Ψ in Abhängigkeit von ψ und dessen Ableitung, und zeigen Sie, dass $\Psi^*(\lambda_{\mathrm{can}}) = \lambda_{\mathrm{can}}$ und somit $\Psi^*(\omega) = \omega$. Anders ausgedrückt: sind (x,y) und (q,p) kanonische Koordinaten auf $T^*\mathbb{R}^n$ zu verschiedenen lokalen Koordinaten x bzw. q auf $\mathbb{R}^n$, so gilt $\sum_j y_j\, dx_j = \sum_j p_j\, dq_j$. Dies erklärt den Namen *kanonisch* für die Form λ_{can}.

Achtung: $\Psi \neq \psi^*$, *denn* Ψ *bildet die Faser* $T^*_x\mathbb{R}^n$ *linear auf die Faser* $T^*_{\psi(x)}\mathbb{R}^n$ *ab und nicht umgekehrt.*

b) Ist $H : T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beliebige glatte Funktion, so wird durch die Gleichung

$$\iota_X \omega = -dH$$

ein eindeutiges Vektorfeld X auf $T^*\mathbb{R}^n$ definiert, das zu H gehörende *Hamiltonsche Vektorfeld*[1]. Beschreiben Sie die Komponenten dieses Vektorfeldes bezüglich des globalen Rahmens $\{\frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_1}\}$ von $T(T^*\mathbb{R}^n)$. Welche Differentialgleichungen erfüllen die Integralkurven dieses Vektorfeldes in den kanonischen Koordinaten (q,p) auf $T^*\mathbb{R}^n$?

[1] Beide Seiten der Gleichung sind 1-Formen auf $T^*\mathbb{R}^n$. Die Tatsache, dass ω nicht-ausgeartet ist, bedeutet gerade, dass sich *jede* 1-Form $\alpha \in \Omega^1(T^*\mathbb{R}^n)$ als $\alpha = \iota_V\omega$ für ein eindeutiges Vektorfeld V auf $T^*\mathbb{R}^n$ schreiben lässt.

Siehe nächstes Blatt!

c) Zeigen Sie, dass H auf den Flusslinien von X konstant ist, d.h. jede Flusslinie ist vollständig in einer Niveaumenge $H^{-1}(c)$ von H enthalten.

d) Zeigen Sie, dass die Lieableitung $L_X\omega$ verschwindet, und folgern Sie daraus, dass der Fluss $\varphi_t : T^*\mathbb{R}^n \to T^*\mathbb{R}^n$ von X die Form ω invariant lässt, d.h. es gilt $\varphi_t^*\omega = \omega$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist dann auch die Volumenform $\Omega := \omega^{\wedge n} \in \Omega^{2n}(T^*\mathbb{R}^n)$ invariant unter dem Fluss φ_t (warum?).