Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2024

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 4

Präsenzaufgaben

(P10) Wahr oder falsch? Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $X \in \Gamma(TM)$ ein glattes Vektorfeld, so gilt

$$df(X) = X(f).$$

(P11) Finden Sie den Definitionsbereich $\mathcal{D}_X \subset M \times \mathbb{R}$ des Flusses des Vektorfeldes $X_x = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ auf $M = \mathbb{R}$!

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Do, 2.5., in der Vorlesung

(A11) Es sei M eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und (φ, U) eine Karte mit den lokalen Koordinaten $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

b) Für $X, Y \in \Gamma(TM)$ und $f, g \in C^\infty(M)$ gilt allgemein

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

c) Für glatte lokale Vektorfelder $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ auf U gilt die Formel

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

d) Berechnen Sie die Lieklammer der Vektorfelder

$$X := x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{und} \quad Y := -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

auf $\mathbb{R}^2$. Können Sie die Antwort auch ohne Rechnung erklären?

(A12) Sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten (F wird weder als injektiv noch als surjektiv vorausgesetzt). Zeigen Sie: Gilt für Vektorfelder $X_i \in \Gamma(TM)$ und $\overline{X_i} \in \Gamma(TN)$ ($i \in \{1, 2\}$) in jedem Punkt $p \in M$ die Beziehung

$$(\overline{X_i})_{F(p)} = F_*(X_i)_p,$$

so folgt auch

$$[\overline{X_1}, \overline{X_2}]_{F(p)} = F_*[X_1, X_2]_p \qquad \text{für alle } p \in M.$$

(A13) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, und sei E ein Vektorbündel vom Rang k über M.

a) Beschreiben Sie die Konstruktion des Bündels $\pi : \Lambda^k E^* \to M$ mit $\pi^{-1}(p) = \Lambda^k(E_p^*)$, der Raum der alternierenden k-Formen auf E_p, indem Sie aus den Übergangsfunktionen $\varphi_{\alpha\beta}$ von E die Übergangsfunktionen $\psi_{\alpha\beta}$ für $\Lambda^k E^*$ gewinnen.

b) Beweisen Sie, dass E genau dann orientierbar ist, wenn das Bündel $\Lambda^k E^*$ trivial ist. Kommt Ihnen diese Aussage bekannt vor?