Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2024

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 11

Präsenzaufgaben

(P21) Ziel dieser Aufgabe ist es zu beweisen, dass der Flächeninhalt $F(\Delta)$ eines Dreiecks $\Delta \subseteq \mathbb{H}^2$ in der hyperbolischen Ebene mit den Innenwinkeln α, β und γ sich als

$$F(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

berechnen lässt.

a) Zeigen Sie, dass

$$\omega = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy = d\left(\frac{1}{y} dx\right)$$

die Volumenform der hyperbolischen Metrik auf $\mathbb{H}^2$ in den Standardkoordinaten (x, y) ist.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des *idealen* Dreiecks mit den Eckpunkten $A = (1, 0)$, $B = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ und $C = \infty$ (das Dreieck hat also zwei Ecken "im Unendlichen") als Funktion des Innenwinkels bei B.

c) Bestimmen Sie nun den Flächeninhalt des idealen Dreiecks mit den Eckpunkten $A = (\cos\psi, \sin\psi)$, $B = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ und $C = \infty$ als Funktion der Innenwinkel bei A und B.

d) Zeigen Sie, dass jedes Dreieck mit einer Ecke im Unendlichen und zwei Ecken im Inneren von $\mathbb{H}^2$ isometrisch zu einem solchen Dreieck ist.

e) Beweisen Sie die allgemeine Formel, indem Sie ein beliebiges Dreieck als Differenz zweier Dreiecke mit jeweils einer Ecke bei Unendlich schreiben, und die bisherigen Rechnungen verwenden.

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Besprechung am Do, 11.7., in der Übung

(A31) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $\gamma : [a, b] \to M$ eine Geodätische, so dass $q = \gamma(b)$ nicht entlang γ konjugiert ist zu $p = \gamma(a)$. Zeigen Sie, dass es dann zu jedem $v \in T_pM$ und $w \in T_qM$ ein eindeutiges Jacobifeld J entlang γ mit $J(a) = v$ und $J(b) = w$ gibt!

(A32) Diese Aufgabe beschäftigt sich mit verschiedenen Modellen des hyperbolischen Raumes H^n in beliebigen Dimensionen. Wir schreiben $\mathbb{R}^{1,n}$ für den Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der (konstanten) pseudo-Euklidischen Metrik

$$g(v, w) = -v_1w_1 + \sum_{i=2}^{n+1} v_iw_i,$$

wobei wir stets $n \geq 1$ voraussetzen. Wir definieren die Untermannigfaltigkeit

$$H^n := \{x \in \mathbb{R}^{1,n} \mid g(x, x) = -1, x_1 > 0\} \subset \mathbb{R}^{1,n}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Einschränkung von g auf H^n positiv definit ist!

b) Beweisen Sie, dass die Isometriegruppe von H^n transitiv auf H^n wirkt, und folgern Sie daraus, dass die *Riemannsche* Mannigfaltigkeit $(H^n, g|_{H^n})$ vollständig ist!

c) Zeigen Sie, dass $(H^n, g|_{H^n})$ konstante Schnittkrümmung hat!
Hinweis: Die vermutlich einfachste Möglichkeit ist, den entsprechenden Beweis aus der Vorlesung für $S^n \subseteq (\mathbb{R}^{n+1}, g_{\mathrm{st}})$ anzupassen, also zu zeigen, dass zu beliebigen Ebenen $\sigma_1 \subseteq T_xH^n$ und $\sigma_2 \subseteq T_yH^n$ eine Isometrie von $\mathbb{R}^{1,n}$ existiert, deren Differential σ_1 auf σ_2 abbildet.

d) Sei $s := (-1, 0, \ldots, 0)$ und sei $K := \{s + y \in \mathbb{R}^{1,n} \mid g(y, y) = 0\}$ der um s verschobene Nullkegel der Metrik g. Zeigen Sie, dass die Inversion $I_1 : \mathbb{R}^{1,n} \setminus K \to \mathbb{R}^{1,n} \setminus K$,

$$I_1(x) := s - \frac{2(x - s)}{g(x - s, x - s)}.$$

eine Involution ist, d.h. dass $I_1 \circ I_1 = \mathrm{id}$ gilt!

e) Zeigen Sie, dass I_1 die Untermannigfaltigkeit H^n diffeomorph auf den offenen Ball $B^n(0, 1) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{1,n}$ abbildet, und dass die zurückgezogene Metrik auf diesem Ball die Form

$$h_1 := I_1^* g = \frac{4}{(1 - \|x\|_{\mathrm{st}}^2)^2} g_{\mathrm{st}}$$

hat, wobei g_{st} die Riemannsche Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnet!

f) Sei nun $t = (0, \ldots, 0, -1) \in \mathbb{R}^n$ und $I_2 : \mathbb{R}^n \setminus \{t\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{t\}$ die Inversion

$$I_2(z) = t + \frac{2(z - t)}{g_{\mathrm{st}}(z - t, z - t)}.$$

Dies ist ebenfalls eine Involution. Zeigen Sie, dass I_2 den offenen Ball $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ diffeomorph auf den oberen Halbraum $\mathbb{H}^n := \{z \in \mathbb{R}^n \mid z_n > 0\}$ abbildet, und dass auf $\mathbb{H}^n$ die zurückgezogene Metrik $I_2^* h_1$ die Form

$$h_2 := I_2^* h_1 = \frac{1}{z_n^2} g_{\mathrm{st}}$$

hat! Für $n = 2$ erhalten wir die Metrik h auf $\mathbb{H} = \mathbb{H}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ aus Aufgabe **(A23)** vom Blatt 8.

Siehe nächstes Blatt!