Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2024

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 10

Präsenzaufgaben

(P20) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und seien $(x_1, \ldots, x_n)$ Koordinaten auf einer offenen Teilmenge $U \subset M$, so dass die Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_i}$ in jedem Punkt von U eine Orthonormalbasis des Tangentialraumes bezüglich g bilden. Zeigen Sie, dass dann die Krümmung von g auf U verschwindet!

Anders ausgedrückt: Hat (M, g) nicht verschwindende Krümmung, so gibt es keine lokalen Koordinaten, für die die Koordinatenvektorfelder in jedem Punkt eine Orthonormalbasis bilden.

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Do, 04.07., in der Vorlesung

(A27) Sei $\gamma : I \to H = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3, \mid x > 0\}$, $\gamma(u) = (a(u), 0, (b(u))$ wie in Aufgabe **(A25)** eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, und $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ die zugehörige Rotationsfläche, d.h.

$$\Sigma = \{(a(u)\cos\varphi, a(u)\sin\varphi, b(u)) \in \mathbb{R}^3 \mid u \in I, \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

a) Zeigen Sie, dass sich die Schnittkrümmung der auf Σ von der Standardmetrik des $\mathbb{R}^3$ induzierten Metrik g in den Koordinaten (u, φ) durch

$$K(u, \varphi) = -\frac{a''(u)}{a(u)}$$

berechnen lässt!

b) Bestimmen Sie die Krümmung des Torus aus Aufgabe **(A25)**, der durch Rotation der Kurve $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to H$, $\gamma_1(u) = (3 + \cos u, 0, \sin u)$ entsteht.

c) Was liefert die Formel aus **a)** für die Rotationsfläche, die zur Kurve $\gamma_2 : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to H$, $\gamma_2(u) = (\cos u, 0, \sin u)$ gehört?

(A28) In dieser Aufgabe soll bewiesen werden, dass die Schnittkrümmungen einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) den Krümmungstensor R eindeutig bestimmen. Zeigen Sie dazu für $x, y, z, t \in T_pM$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\big(R(x+\alpha t, y+\beta z, y+\beta z, x+\alpha t) - R(x+\alpha z, y+\beta t, y+\beta t, x+\alpha z)\big)|_{\alpha,\beta=0} = 6R(x, y, z, t),$$

wobei wir $R(a, b, c, d) := g(R(a, b)c, d)$ gesetzt haben.
Hinweis: Verwenden Sie die Symmetrien des Krümmungstensors und die Bianchi-Identität, um die "störenden" Terme umzuschreiben!

(A29) Wir betrachten $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit der runden Metrik. Seien $A, B, C \in S^2$ drei Punkte, welche nicht alle auf demselben Großkreis liegen, und seien $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 2\pi)$ die Innenwinkel eines zugehörigen Dreiecks Δ, welches aus minimalen Geodätischen besteht (falls unter den Punkten keine Antipoden sind, ist dieses eindeutig bestimmt). Beweisen Sie, dass die Fläche $F(\Delta)$ dieses Dreiecks sich als

$$F(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

berechnen lässt![1]
Der folgende Beweis war offenbar bereits Euler bekannt: Vervollständigen Sie die Seiten des Dreiecks zu Großkreisen. Die zu einem Seitenpaar gehörenden Großkreise zerlegen die Sphäre in jeweils 4 Gebiete, von denen je genau eines das Dreieck Δ und eines das gegenüberliegende Dreieck $-\Delta$ enthält. Was ist der Flächeninhalt der so ausgezeichneten beiden Gebiete? Die Vereinigung der 6 auf diese Weise den drei Seitenpaaren zugeordneten Gebiete überdeckt die gesamte Sphäre, wobei genau Δ und $-\Delta$ mehrfach überdeckt werden.

[1] Die Volumenform auf S^2 war schon Thema auf dem Übungsblatt 6, und wird auch in der folgenden Aufgabe noch einmal wiederholt.

(A30) *Mit etwas Glück ist diese Aufgabe eine Wiederholung von Dingen, die Sie bereits in Höherer Analysis bzw. in der Mathematik für Physiker gesehen haben.*
Eine *Volumenform* auf einer n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist eine Differentialform $\mu \in \Omega^n(M)$ welche nirgends verschwindet. Zeigen Sie:

a) Eine Mannigfaltigkeit besitzt genau dann eine Volumenform, wenn sie orientierbar ist, d.h. wenn es einen Altas gibt, dessen Kartenübergänge positive Determinante haben.

b) Ist M orientierbar, und ist g eine Riemannsche Metrik auf M, so wird durch die Bedingung

$$\mu_p(e_1, \dots, e_n) = 1 \quad \text{für alle positiv orientierten Orthonormalbasen } e_1, \dots, e_n \text{ von } T_pM$$

eine eindeutige zu g assoziierte Volumenform μ definiert.

c) Hat die Metrik g in lokalen positiv orientierten Koordinaten $(x_1, \dots, x_n)$ auf $U \subset M$ die Koeffizientenfunktionen g_{ij}, so hat die Volumenform lokal die Form

$$\mu|_U = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

d) Wir orientieren nun $M = S^2$ als Rand von B^3 und betrachten die von der Standardmetrik des $\mathbb{R}^3$ induzierte runde Metrik g auf S^2. Zeigen Sie, dass die dazu assoziierte Volumenform μ durch

$$\mu_x(v, w) = \langle x, (v \times w) \rangle$$

gegeben ist, wobei $\times$ das Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet, und wir die Tangentialräume T_xS^2 mit den linearen Unterräumen $(\mathbb{R}x)^\perp$ des $\mathbb{R}^3$ identifizieren.