Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik II für Studierende der Physik: Blatt 8 zur Abgabe am 5.6.2019 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (2 Punkte)
Betrachten Sie die differenzierbare Funktion $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $F_1(x_1,x_2,x_3) = \sin(x_1x_2x_3)$ und $F_2(x_1,x_2,x_3) = \cos(x_1x_2x_3)$, sowie die differenzierbare Funktion $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $G_1(y_1,y_2) = 5y_1^2 - 3y_2^2$ und $G_2(y_1,y_2) = y_1^2 + y_2^2$, und $H := G \circ F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.
Berechnen Sie dH_x auf zwei Weisen: einmal, indem Sie zunächst H bestimmen, und einmal, indem Sie die Kettenregel verwenden.

Aufgabe 2: (1+3 Punkte)
Betrachten Sie im Folgenden die (unendlich oft differenzierbare) Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{R}_+ \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad (r,\varphi) \mapsto (x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

mit der (unendlich oft differenzierbaren) Umkehrabbildung Ψ definiert auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ durch

$$\Psi(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

Gegebenen sei eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Abbildung $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, deren Verkettung mit Φ wir als F bezeichnen: $F(r,\varphi) = f(\Phi(r,\varphi))$.

(a) Zeigen Sie

$$(\partial_x f) \circ \Phi = (\cos\varphi)\partial_r F - \frac{\sin\varphi}{r}\partial_\varphi F,$$

indem Sie zur Berechnung von $\partial_x(F \circ \Psi)$ die Kettenregel verwenden.

(b) Zeigen Sie analog

$$(\partial_x^2 f) \circ \Phi = \left(\frac{\sin^2\varphi}{r}\partial_r + \cos^2\varphi\,\partial_r^2 - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\partial_r\partial_\varphi + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\partial_\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\partial_\varphi^2\right)F,$$

$$(\partial_y^2 f) \circ \Phi = \left(\frac{\cos^2\varphi}{r}\partial_r + \sin^2\varphi\,\partial_r^2 + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\partial_r\partial_\varphi - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\partial_\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\partial_\varphi^2\right)F.$$

Anmerkung: Es folgt somit

$$\left(\partial_x^2 f + \partial_y^2 f\right) \circ \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)F.$$

Aufgabe 3: (2 Punkte)
Wir fassen
$$\mathrm{SL}(n) := \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) : \det(A) = 1\} \quad \subseteq \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$$
als eine Untermenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ auf. Es sei nun $\varepsilon > 0$ und $A\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}), t \mapsto A(t)$ eine differenzierbare Abbildung, so dass $A((-\varepsilon,\varepsilon)) \subseteq \mathrm{SL}(n)$ ist und $A(0) = \mathbf{1}_n$ gilt. Außerdem sei:
$$B = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A.$$
Beweisen Sie die Identität $\mathrm{Tr}(B) = 0$, wobei Tr die Spurabbildung bezeichnet.

Aufgabe 4: (2 Punkte)
Bestimmen Sie das quadratische Taylorpolynom der Funktion
$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$
im Punkt $(1,2)$.

Aufgabe 5: (3+0 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass eine symmetrische Matrix A genau dann positiv definit bzw. negativ definit bzw. indefinit ist, wenn unter ihren Eigenwerten nur positive Zahlen bzw. nur negative Zahlen bzw. sowohl positive wie negative Zahlen sind.
Hinweis: Im Abschnitt über Normalformen haben wir bewiesen, dass es zu jeder symmetrischen Matrix A eine orthogonale Matrix S gibt, so dass $S^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot S$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine symmetrische Matrix $A \in Mat(n,\mathbb{R})$ genau dann positiv definit ist, wenn alle Hauptminoren (d.h. die Determinanten der linken oberen $k \times k$-Teilmatrizen für $1 \leq k \leq n$) positiv sind.
Hinweis: Für eine der Implikationen ist es nützlich, die Aussage des Trägheitssatzes von Sylvester für die Enschränkungen der Bilinearform $b_A(v,w) = \langle v, Aw\rangle$ auf die Unterräume $\mathbb{R}^k \times 0 \subseteq \mathbb{R}^n$ für verschiedene $1 \leq k \leq n$ zu betrachten.

Aufgabe 6: (3 Punkte)
Die Wirkung $W(x,t)$, die x Einheiten eines Medikaments t Stunden nach der Einnahme auf einen Patienten haben, werde durch
$$W(x,t) \ := \ x^2(a-x)t^2e^{-t}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0,$$
wobei $a \in \mathbb{R}, a > 0$ fest ist, dargestellt. Bestimmen Sie die Zeit t_m und die Dosis x_m so, dass $W(x_m,t_m)$ maximal wird.